

La Galleria del Borromini a Palazzo Spada, Roma

Modello regolare ideale e modello reale deformato

Abaco delle deformazioni prospettiche

Camillo Trevisan

Un attento osservatore, che visiti e percorra la Galleria di Palazzo Spada a Roma, è colpito da una reale e voluta contraddizione: egli vede un'architettura deformata, ma tende alla percezione - e alla decodifica razionale - di un'ideale galleria regolare, nella quale le colonne sono tutte della stessa altezza e ugualmente distanziate tra loro.

Una simile esperienza, in realtà, avviene ogni qualvolta si osserva una prospettiva o una fotografia. In questo caso, tuttavia, l'effetto scenico dato dall'*entrare* in una prospettiva, potendola percorrere tutta sino ad una soglia incerta e sconosciuta, ci proietta in una nuova dimensione. Questa lieve vertigine è poi accentuata dal continuo modificarsi sia di quello che vediamo, sia di ciò che percepiamo. Superato l'immediato stupore visivo, resta tuttavia la curiosità di capire. Com'è stata costruita la Galleria? A quali regole risponde? Come dovrebbe essere percorsa, per ricreare l'evidente corrispondenza con una galleria regolare? E con quale galleria regolare?

Questo studio ha l'obiettivo di proporre le risposte ad alcune di queste domande.

La prima sezione indaga e approfondisce la configurazione della Galleria reale, suggerendo l'esistenza di un metodo non prospettico di scansione in profondità delle colonne e dei riquadri pavimentali.

Poiché la disposizione delle colonne non segue un andamento prospettico - e dunque non esiste un meccanismo proiettivo che mette in stretta e biunivoca relazione la Galleria con una famiglia di modelli regolari - è lecito chiedersi se esiste un modello regolare *interpolante*, da preferire a tutti gli altri, infiniti, possibili modelli regolari. La seconda sezione ricerca il modello regolare *ideale* sulla scorta di indagini proporzionali, in assenza di indicazioni peculiari di tipo proiettivo.

L'ultima sezione, infine, approfondisce l'analisi geometrica, suddividendo e illustrando gli effetti delle variazioni di alcuni parametri costruttivi di una prospettiva solida.

Le appendici presentano alcuni metodi di costruzione geometrica di una prospettiva solida, illustrano l'uso di un *software* per la generazione di prospettive solide e la loro contro deformazione e, infine, definiscono la nomenclatura usata nell'articolo.

1. Le caratteristiche della scansione delle colonne e dei riquadri del pavimento nella Galleria reale

Rocco Sinisgalli¹ ha messo in luce, anche sulla scorta di un accurato rilievo, come in realtà la Galleria di Palazzo Spada non sia una vera e propria prospettiva solida. O meglio, delle due caratteristiche fondamentali di una prospettiva solida - ma anche di una prospettiva lineare, vale a dire la convergenza delle ortogonali al quadro verso un unico punto di concorso e la scansione in profondità degli oggetti in funzione della loro distanza dal punto di vista - solo la prima è rigorosamente mantenuta e verificata. Infatti, se esiste un unico punto di fuga², tuttavia gli assi verticali delle 12 paia di colonne della Galleria reale non sono affatto disposti, in planimetria, seguendo una rigorosa scansione prospettica³ (cfr. figure 1.1 e 1.2).

Un generico modello regolare⁴, deformato in prospettiva solida affinché le sue prime e ultime colonne coincidano con le prime e le ultime colonne della Galleria reale, non manterrà, dunque, la coincidenza anche delle altre colonne intermedie con le omologhe della prospettiva solida: più grande sarà la distanza di quelle dall'inizio o dalla fine della Galleria, maggiore sarà anche il loro spostamento rispetto alle posizioni previste in una vera prospettiva solida.⁵

In altre parole, le colonne della Galleria Spada, pur appartenendo tutte alla piramide prospettica che concorre verso l'unico punto di fuga, non si riferiscono allo schema di deformazione di un modello regolare, scandito da intercolunni tutti uguali tra loro (cfr. figura 1.2). È pertanto assai interessante tentare di rispondere alla domanda: perché il Borromini ha scelto proprio quella scansione, anziché quella prospettica? Esiste una regola limpida e connessa che lega tra loro le posizioni planimetriche degli assi delle colonne, oppure queste sono state disposte seguendo imperscrutabili e indefinibili meccanismi soggettivi, semplicemente modificando liberamente una scansione prospettica di base?

Un'accurata analisi del rilievo, delle misure degli interassi e dei riquadri originali della pavimentazione, porta alla conclusione che una regola esiste ed è definita da una serie geometrica.

¹ Al riguardo si veda: Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica, dal Rinascimento al Barocco. Borromini a quattro dimensioni*, Cadmo, Firenze 1998.

² Il punto di fuga è molto ben identificato ed è posto sul piano di simmetria della Galleria, a circa 70 palmi dal piano verticale passante per gli assi delle colonne iniziali, ad una altezza di 6 palmi e 2/3 rispetto al piano orizzontale di inizio: tuttavia, le considerazioni relative a questa sezione sono limitate agli aspetti planimetrici, poiché in altimetria la Galleria segue fedelmente la disposizione di pianta e la convergenza verso il punto di fuga.

³ È inoltre da considerare che un'applicazione rigorosa dei metodi della prospettiva solida produrrebbe colonne a sezione orizzontale sempre più ellittica, man mano che queste si distanziano dal piano delle tracce (cfr. figure 1.1, 1.2 e appendici A e C). La figura 1.1 illustra infatti questo effetto: il grafico in colore blu si riferisce al modello regolare, deformato in modo che gli assi delle prime ed ultime coppie di colonne si sovrappongano al modello reale, in rosso. Nella figura 1.2 è invece presentato il confronto tra il modello regolare e il modello reale contro-deformato (a sinistra). A destra, la dimostrazione grafica che le rette congiungenti gli assi delle dodici colonne non convergono verso un unico punto di vista e nemmeno verso due o tre, ben definibili, ma concorrono verso una decina di punti distribuiti in uno spazio di circa 6 palmi. Nel grafico a destra compaiono anche le quote, in palmi, relative al modello regolare *ideale* descritto nella sezione 2. In questa sede le misure saranno di norma considerate in palmi romani e onces (cfr. nota 6). Le indicazioni di misure relative al rilievo e agli scarti, per comodità e chiarezza, saranno invece espresse in metri o in centimetri.

⁴ Per la nomenclatura si veda l'appendice C. Nella sezione 2 è invece studiata l'esistenza o meno di un modello regolare privilegiato, stante la certezza che, se la Galleria di Palazzo Spada fosse una vera prospettiva solida, esisterebbero infiniti modelli regolari - ed altrettanti punti di vista - tutti verosimili e differenti tra loro solo nell'intercolunnio. Nel caso il punto scelto per la restituzione del modello regolare non fosse coincidente con quello usato per la costruzione della prospettiva solida, il modello restituito sarebbe ancora regolare, anche se con intercolunni diversi da quelli del modello regolare di partenza (cfr. sezione 3 e figura 3.2.1).

⁵ Lo scarto quadratico medio delle distanze tra gli assi delle colonne della Galleria reale e dell'ideale galleria regolare deformata è pari a 8 centimetri (10 centimetri per i riquadri), con scarti nelle sei colonne centrali compresi tra 7 e 14 centimetri (cfr. figura 1.1).

Supponiamo, infatti, di iniziare la serie con un *seme* di cinque palmi (60 once). La distanza tra gli assi delle prime due colonne sarà dunque pari a 60 once, così come anche la lunghezza del primo riquadro pavimentale, completo del primo spazio (di ampiezza pari a 12 once, un quinto di 60). Per definire il successivo interasse (e il successivo riquadro), si adotta una riduzione con proporzione di 5/6: il secondo interasse (e riquadro) sarà dunque ampio 50 once (10 once per il secondo spazio, un quinto di 50). La terza lunghezza della serie sarà pari ai cinque sestimi di 50, vale a dire 41 once e due terzi.

Dal quarto elemento della serie che si sta costruendo il coefficiente di riduzione cambia, però, passando dai 5/6 (10/12) agli 11/12 e da 1/5 a 1/4, per lo spazio. La quarta lunghezza della serie sarà dunque pari agli undici dodicesimi di 41 e 2/3, e così via fino all'ultimo interasse e all'ultimo riquadro.

Questa forma di scansione in profondità, pur non avendo nulla a che vedere con la prospettiva, tuttavia produce una sequenza assai più modulata, priva dell'effetto di affastellamento delle colonne verso la fine della Galleria e riducendo la lunghezza della prima lacuna (cfr. figura 1.1).

Prima di una rigorosa verifica di quest'ipotesi sono però necessarie due considerazioni preliminari.

La prima riguarda la trasformazione in palmi romani delle misure rilevate in metri. Non solo esistono varie misure riferite al palmo⁶, ma gli strumenti stessi usati dagli operai potevano essere leggermente diversi tra loro e dal campione di riferimento.

Anche trascurando piccoli errori di costruzione e di rilievo, non è dunque possibile definire con assoluta precisione quanti palmi sia lunga la Galleria o le ampiezze in palmi dei vari interassi. A complicare ulteriormente il problema, si consideri che le colonne sono deformate e leggermente fuori asse rispetto ai plinti.⁷

È poi da considerare un altro aspetto: le successive riduzioni (5/6, 5/6, 11/12, 11/12, ecc.), se nei primi passaggi producono numeri razionali facilmente esprimibili come frazioni tra interi piccoli, presto producono valori frazionari non facilmente identificabili. Ad esempio, l'ultimo valore della serie è pari a 434.00218599... once. Si impone dunque un arrotondamento: all'oncia più vicina - per eccesso o per difetto - oppure al quinto di oncia (il minuto). In quest'ultimo caso si ottengono risultati migliori rispetto all'arrotondamento all'oncia (cfr. tabelle 1 e 2, colonne 4 e 7); tuttavia, considerando che un minuto è pari a meno di 4 millimetri, sembra eccessivo - pur se non impossibile - pensare che si sia sostenuto un così grande lavoro supplementare di calcolo.

Per la verifica dell'ipotesi è stato messo a punto un programma per computer, in grado di rendere minimo lo scarto tra i dati prodotti dalla serie geometrica proposta e gli omologhi misurati, modificando anche il coefficiente di trasformazione da metri a palmi, oltre ad un fattore di traslazione che sposta solidalmente la griglia calcolata rispetto a quella rilevata, per ridurne le differenze. Come si può notare dall'esame delle tabelle 1 e 2 e dalla figura 1.3, al variare dell'arrotondamento si modificano di pochissimo sia gli scarti quadratici medi, sia i coefficienti di conversione (i modelli finali sono diversi tra loro per non più di 1.8 millimetri); attestandosi i primi attorno al centimetro, i secondi sui valori di 0.22445 per il calcolo degli interassi e di 0.22285 per i riquadri.⁸

Vi è dunque una differenza di circa un millimetro e mezzo tra le misure dei due palmi campione: questo dato potrebbe far supporre l'uso di strumenti leggermente diversi tra loro da parte degli operai che hanno impostato le colonne rispetto a quelli che hanno costruito il pavimento.

La distanza teorica tra il primo e l'ultimo asse è pertanto pari a 434 once (36 palmi e 1/6); anche se le stesse tabelle indicano che il primo interasse sembra essere stato spostato all'indietro di un'oncia, portando idealmente la somma degli interassi a 435 once (36 palmi e 1/4) e quella dei riquadri a 430 once (35 palmi e 5/6).

Questo schema, dunque, è molto più vicino alla Galleria reale rispetto ad una prospettiva solida canonica, che si discosta dalla Galleria con scarti medi e massimi cinque volte maggiori.

Da notare, infine, che serie geometriche del tutto analoghe a quelle proposte possono essere ottenute anche per via grafica, con grande facilità e ricercata finezza proporzionale (cfr. figura 1.4).⁹

Se questo è stato il metodo adottato per disporre le colonne ed i riquadri pavimentali, ne discende come naturale l'uso dei dodici "punti di vista" per deformarle, uno per ciascuna colonna.¹⁰

Infatti, una volta trovate le posizioni degli assi, era in ogni caso necessario deformare prospetticamente ciascuna colonna, in pianta come anche in alzato. Per la deformazione valgono sempre i due meccanismi già illustrati, combinati tra loro: la convergenza delle ortogonali al piano frontale verso il punto di fuga comune e la riduzione in profondità, questa volta non degli interassi - già trovati - ma dei plinti, delle basi, dei fusti e dei capitelli delle colonne.

L'adozione di un *centro di deformazione* per ogni colonna - posto in una sequenza che riproduce la scansione in profondità degli assi -, fa sì che le deformazioni stesse siano contenute entro limiti accettabili alla vista di un osservatore che percorra la Galleria.

La Galleria sembra pertanto costruita sulla base della separazione e dell'accumulo degli effetti derivati da meccanismi diversi: la piramide prospettica concorrente al punto di fuga; la scansione geometrica delle profondità degli elementi principali; la deformazione individuale, ancora una volta prospettica, di ciascuna colonna della Galleria.

⁶ Cfr. Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica...*, op. cit., p. 91. Il palmo romano dal fondo Spada è pari a 22.6 centimetri, il palmo architettonico romano (da De Rossi, *Studio di architettura civile*, 1706) risulta di 22.4 centimetri; mentre il palmo dal *Manuale di metrologia* del Martini è di 22.3422 centimetri.

⁷ Cfr. Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica...*, op. cit., pp. 119-20. In quelle pagine sono presentate le sezioni orizzontali delle dodici colonne rilevate.

⁸ Nel caso le misure ricavate dalla serie geometrica fossero state usate direttamente sul piano inclinato della Galleria, i parametri di conversione metro/palmo sarebbero 0.2255 e 0.2238, mantenendo tutte le ipotesi proposte (cfr. legenda tabelle 1e 2).

⁹ Nella figura 1.4 la retta AD corrisponde ad una riduzione pari a 0.8321 (5/6 = 0.8333, differenza 0.0012); la retta AC a 0.9138 (11/12 = 0.91666, differenza 0.0029); AE a 0.8 (4/5 = 0.8) ed infine AF a 0.7474 (3/4 = 0.75, differenza 0.0026). Usando i valori riportati nella figura, lo scarto quadratico medio - per i 12 interassi - è di 1.7 centimetri, con uno scarto massimo di 3.1 centimetri sul terzo asse e generando una distanza complessiva, tra il primo e l'ultimo asse, di 433.7 once; sostanzialmente confermando i dati della tabella 1, colonna 9. Tuttavia, è da notare che una variazione, anche piccola, dell'inclinazione della retta generatrice la serie - l'inclinazione corrisponde infatti al coefficiente di riduzione -, comporta una grande differenza degli ultimi interassi, dovuta proprio al metodo ricorsivo di calcolo.

¹⁰ Cfr. Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica...*, op. cit., pp. 21-6.

Tabella 1 - Interassi colonne (cfr. figura 1.3)

	1 metri	2 once	3 o	4 cm	5 once	6 once	7 cm	8 once	9 once	10 cm	
1	0.0000	0.00	0	-1.2	0.00	0.0	-1.3	0.00	0.00	-1.2	
2	1.1447	61.20	60	1.0	61.19	60.0	0.9	61.19	60.00	1.0	
3	2.0958	112.06	110	2.6	112.03	110.0	2.5	112.03	110.00	2.6	
4			152			151.6			151.67		
5	3.5400	189.28	190	-2.6	189.24	189.8	-2.3	189.23	189.86	-2.4	
6	4.2159	225.41	225	-0.5	225.37	224.8	-0.2	225.36	224.87	-0.3	
7	4.8271	258.09	257	0.8	258.04	256.8	1.0	258.04	256.97	0.8	
8			286			286.2			286.39		
9	5.8653	313.60	313	-0.1	313.54	313.2	-0.6	313.53	313.35	-0.9	
10	6.3336	338.64	338	0.0	338.57	338.0	-0.2	338.56	338.07	-0.3	
11	6.7545	361.14	361	-1.0	361.07	360.8	-0.8	361.06	360.73	-0.6	
12			382			381.6			381.51		
13	7.4993	400.97	401	-1.3	400.89	400.6	-0.7	400.88	400.55	-0.6	
14	7.8390	419.13	418	0.9	419.05	418.0	0.7	419.04	418.00	0.7	
15	8.1419	435.33	434	1.3	435.24	434.0	1.0	435.23	434.00	1.1	
SQM in centimetri				1.3					1.2	1.2	
Traslazioni in once				0.65					0.69	0.65	
Conversione metri/palmi				0.224434					0.22448	0.224485	

Tabella 2 - Riquadri della pavimentazione (cfr. figura 1.3)

	1 metri	2 once	3 o	4 cm	5 once	6 once	7 cm	8 once	9 once	10 cm	
1	0.0000	0.00	0	-2.7	0.00	0.0	-3.0	0.00	0.00	-2.8	
2	0.9178	49.42	48	-0.1	49.42	48.0	-0.3	49.41	48.00	-0.2	
3	1.1308	60.89	60	-1.1	60.89	60.0	-1.3	60.88	60.00	-1.2	
4	1.8455	99.38	98	-0.2	99.37	97.6	0.3	99.36	97.50	0.6	
5	2.0525	110.53	110	-1.7	110.52	110.0	-2.0	110.51	110.00	-1.9	
6	2.6538	142.90	142	-1.0	142.90	141.2	0.2	142.88	141.25	0.2	
7	2.8349	152.66	152	-1.5	152.65	151.6	-1.0	152.64	151.67	-1.0	
8	3.3794	181.98	180	1.0	181.97	180.2	0.3	181.95	180.31	0.2	
9	3.5546	191.41	190	-0.1	191.40	189.8	0.0	191.39	189.86	0.0	
10	4.0592	218.59	216	2.1	218.58	216.0	1.8	218.56	216.12	1.7	
11	4.2135	226.90	225	0.8	226.89	224.8	0.9	226.87	224.87	0.9	
12	4.6675	251.34	249	1.6	251.33	248.8	1.7	251.31	248.94	1.6	
13	4.8168	259.38	257	1.7	259.37	256.8	1.8	259.34	256.97	1.6	
14	5.2159	280.88	279	0.8	280.86	278.8	0.9	280.84	279.03	0.5	
15	5.3553	288.38	286	1.7	288.36	286.2	1.1	288.34	286.39	0.8	
16	5.7186	307.95	306	0.9	307.93	306.4	-0.1	307.90	306.61	-0.4	
17	5.8530	315.18	313	1.3	315.16	313.2	0.7	315.14	313.35	0.5	
18	6.1864	333.14	332	-0.6	333.12	331.8	-0.5	333.09	331.89	-0.6	
19	6.3108	339.84	338	0.7	339.82	338.0	0.4	339.79	338.07	0.4	
20	6.6135	356.13	355	-0.6	356.11	355.2	-1.3	356.08	355.07	-0.9	
21	6.7299	362.41	361	-0.1	362.38	360.8	0.0	362.35	360.73	0.2	
22	6.9987	376.88	377	-2.9	376.86	376.4	-2.1	376.82	376.31	-1.9	
23	7.1082	382.78	382	-1.3	382.75	381.6	-0.8	382.72	381.51	-0.6	
24	7.3720	396.98	396	-0.9	396.96	395.8	-0.8	396.92	395.79	-0.7	
25	7.4715	402.34	401	-0.2	402.32	400.6	0.2	402.28	400.55	0.4	
26	7.7054	414.94	414	-1.0	414.91	413.6	-0.5	414.88	413.64	-0.5	
27	7.7950	419.76	418	0.6	419.74	418.0	0.3	419.70	418.00	0.3	
28	8.0090	431.28	429	1.5	431.26	429.0	1.2	431.22	429.00	1.3	
SQM in centimetri				1.2					1.0	0.9	
Traslazioni in once				1.46					1.59	1.52	
Conversione metri/palmi				0.22284					0.22285	0.222875	

Legenda tabelle 1 e 2 (cfr. figura 1.3).

Colonna 1. Sono qui riportate le misure rilevate sul piano inclinato della Galleria e proiettate sul piano orizzontale (cfr. Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica...*, op. cit., p. 17). Per comodità di lettura e per confronto dei dati, il primo valore di ciascuna tabella è posto a zero. Nella prima tabella sono riportate le posizioni degli assi delle colonne rilevate (si sono considerati come assi delle colonne i punti di intersezione delle diagonali dei quadrilateri delle basi, anche se potrebbero essere stati considerati altri riferimenti, leggermente spostati rispetto a quelli: si vedano, ad esempio, le prime colonne con il toro che deborda dalla base). Nella seconda tabella sono invece elencate le posizioni dell'inizio e della fine dei 14 riquadri pavimentali originali. Unità di misura: metro.

Da notare che, nella tabella 1, le righe 4, 8, 12 corrispondono alle lacune poste tra i quattro gruppi di tre colonne: mancano pertanto le indicazioni del rilievo, non esistendo le colonne poste in quelle posizioni. Tuttavia, la serie geometrica comprende anche le lacune (colonne 3, 6, 9 della tabella 1).

Colonne 2, 5, 8. In queste colonne sono riportate, in onces, le equivalenti misure in metri della prima colonna delle tabelle. Poiché non è conosciuta l'esatta misura degli strumenti usati per la costruzione della Galleria, si sono fatte varie ipotesi (cfr. colonne 3, 6, 9), ciascuna delle quali comporta un risultato leggermente diverso, in funzione del coefficiente di trasformazione tra metro e palmo romano.

Colonne 3, 6, 9. Per verificare l'ipotesi della serie geometrica (con riferimento alla disposizione degli assi delle colonne e dei riquadri pavimentali), è anzitutto necessario trasformare i valori rilevati da metri a palmi romani, o meglio in onces (1 palmo = 12 onces). L'ipotesi prevede un seme di partenza (sia per il primo interasse, sia per il primo riquadro, completo di spazio) pari a 60 onces (5 palmi), ed una progressiva riduzione degli intervalli, pari a $5/6$ per i primi due successivi intervalli e a $11/12$ per tutti gli altri (gli spazi tra i riquadri sono ampi $1/5$ dell'intervallo nei primi due casi e $1/4$ in tutti gli altri). La sequenza di riduzione produce però dei valori non sempre arrotondati (cfr. colonna 9). Si sono perciò considerate altre due ipotesi: la prima prevede l'arrotondamento all'oncia (colonna 3), la seconda l'arrotondamento al quinto di oncia (il minuto). Tali ipotesi considerano dei coefficienti di trasformazione tra metro e palmo leggermente diversi tra loro, per far meglio coincidere le ipotesi proposte con il rilievo. La differenza è comunque minima: al riguardo, si vedano le note presentate a fondo pagina.

Colonne 4, 7, 10. Scarti, espressi in centimetri, tra le ipotesi e i valori rilevati e trasformati in onces (cfr. colonne 2, 5, 8).

Pertanto, le colonne 2, 3, 4 fanno riferimento all'ipotesi di arrotondamento all'oncia dei valori calcolati per la serie geometrica; le colonne 5, 6, 7 all'arrotondamento al quinto di oncia; le colonne 8, 9, 10 ai valori non arrotondati. L'ipotesi relativa alle colonne 2, 3, 4 sembra la più probabile, per entrambe le tabelle, anche se non la migliore come somma di scarti.

In figura 1.3 sono illustrati gli scarti, presentati nelle due tabelle (colonna 4), tra gli assi ed i riquadri reali e calcolati.

Lo scarto quadratico medio (**SQM**) è espresso in centimetri ed indica, con un solo valore, la "qualità" dell'interpolazione. In questo dato, infatti, gli scarti maggiori "pesano" proporzionalmente più degli altri, poiché gli scarti stessi sono elevati al quadrato.

La **traslazione**, in onces, indica lo spostamento solidale dei dati indicati nelle colonne 3, 6, 9, per rendere minimo lo scarto tra questi e i dati presentati nelle colonne 2, 5, 8. La traslazione corrisponde agli scarti dei primi valori delle colonne 4, 7, 10 (qui espressi in centimetri).

I valori di **conversione** tra metri e palmi romani (tutti diversi tra loro, ma attestati con buona approssimazione attorno al valore medio di 0.224 metri per palmo), rendono conto dei valori calcolati nelle colonne 2, 5, 8. Le lievi differenze tra i valori trovati, possono trovare una giustificazione - oltre che nell'imprecisione costruttiva - nella diversità di strumenti usati dagli operai.

È infine da notare che, come già detto, le misure rilevate sono state proiettate sul piano orizzontale, con una riduzione pari a 0.99556 (il coseno di 5.4° , inclinazione del pavimento della Galleria). Se le misure trovate dalle serie geometriche fossero state usate direttamente sul piano inclinato - come, del resto, sembra più probabile -, i valori di trasformazione da metri a palmi romani subirebbero un lieve aumento (1.00446), portandosi rispettivamente a 0.2255 (per gli assi, tabella 1) e 0.2238 (per i riquadri, tabella 2); mantenendo invariati i valori presentati in entrambe le tabelle e tutte le considerazioni fin qui svolte.

2. I modelli regolari e il modello regolare ideale: le sue dimensioni e proporzioni e il suo punto di vista costruttivo

Pur avendo accertato che, come base della Galleria reale, non esiste nessun modello regolare (cfr. figura 1.1 e sezione 1), anche se in ogni modo infiniti possono essere i modelli regolari che, una volta deformati, "interpolano" la Galleria stessa; tuttavia è del tutto evidente la necessità, per l'architetto, di considerare un ideale modello regolare di riferimento.

Definire la scansione in profondità delle colonne e dei riquadri pavimentali, infatti, non è affatto sufficiente per completare il progetto: ad esempio, quanti cassettoni è necessario considerare per la volta? Quali proporzioni dare alle colonne, alle trabeazioni, ai basamenti? Quale intercolunnio regolare adottare?

Per rispondere a queste e ad altre domande, si sono anzitutto considerate le misure (in palmi romani) dedotte dal rilievo:

	palmi	frazioni	moduli
Diametro prima colonna alla base (modulo)	1	2/3	1
Distanza in larghezza tra le colonne (facce interne prima coppia frontale)	14	-	8.4
Distanza tra gli assi delle due colonne frontali interne	15	2/3	9.4
Distanza tra gli assi delle due colonne frontali esterne	20	1/3	12.2
Distanza in larghezza tra i basamenti	13	-	7.8
Distanza in larghezza tra gli assi delle prime due colonne appaiate	2	1/3	1.4
Altezza totale colonna (con base e capitello, escluso plinto e abaco)	13	1/3	8
Diametro arco di facciata	13	1/3	8
Altezza totale trabeazione	3	-	1.8

Come è noto, fissato il fronte del colonnato, esistono infiniti modelli regolari - vale a dire infiniti possibili intercolunni - che soddisfano la domanda: trovare un modello ideale, nel quale gli assi della prima ed ultima colonna si sovrappongano agli assi della prima ed ultima colonna del modello reale rilevato.

Usando le misure dei cassettoni posti sulla volta è però possibile definire un modello regolare che meglio degli altri risponde al requisito di mantenere quadrati i cassettoni stessi. In tal senso, i cassettoni della volta, costituiscono l'unico indizio utile per definire le dimensioni del modello regolare che potremmo definire "ideale".

Per definire gli intercolunni di quel modello si sono dunque considerati i cassettoni come quadrati.

L'arco contiene 7 cassettoni (con 8 intervalli), disposti a raggiera, più una fascia a destra e a sinistra sulla base dell'arco stesso. Poiché il diametro dell'arco di facciata è pari a 13 palmi e un terzo, il suo sviluppo è pari a circa 21 palmi.

Considerando le due fasce all'imposta dell'arco di ampiezza pari a 1.2 palmi ciascuna, restano dunque 18.6 palmi.

Se supponiamo di porre pari a 2.6 palmi un cassettoni - completo di spazio: 2.2 p. + 0.4 p. di spazio - si ottiene: $2.2 \times 7 + 0.4 \times 8 = 18.6$ palmi.

In profondità le arcate contengono 4 cassettoni, con 3 intervalli, equivalenti a due intercolunni, più un modulo (un diametro di colonna). Dunque, due intercolunni più un modulo sono pari a: $2.2 \times 4 + 0.4 \times 3 = 10$ palmi [6 moduli].

Pertanto, l'intercolunnio è pari a $4 \frac{1}{6}$ palmi (2 moduli e mezzo: l'elegante e solido Eustilo), mentre l'interasse è pari a 3.5 moduli = $5 \frac{5}{6}$ p. Con queste misure, i cassettoni risultano pertanto quadrati e le dimensioni complessive sufficientemente "rotonde", con le altezze totali delle colonne pari al diametro dell'arco di facciata [8 moduli] e pari anche alle lunghezze dei gruppi di tre colonne [$2.5 \times 2 + 3$], misurati sulle superfici esterne delle tre colonne.

Ciascun gruppo di tre colonne, pertanto, contiene idealmente un cubo perfetto.

Riassumendo, l'ipotesi fatta produce le seguenti ulteriori misure (cfr. figura 1.2):

	palmi	frazioni	moduli
Lunghezza del colonnato ideale ¹¹	84	1/3	50.6
Interasse colonne	5	5/6	3.5
Lunghezza riquadri pavimento (con spazio)	5	5/6	3.5
Spazi tra i riquadri (uguali in larghezza e profondità)	1	-	0.6
Larghezza riquadri pavimento	3	-	1.8
Lunghezza dei basamenti (3 colonne)	14	1/3	8.6
Distanza tra i basamenti (lacune)	9	-	5.4
Distanza tra gli assi delle due colonne finali interne	11	-	6.6
Distanza tra i plinti delle colonne	3	1/2	2.1
Larghezza e profondità plinti colonne	2	1/3	1.4
Larghezza basamento (una colonna)	2	2/3	1.6
Larghezza basamento (due colonne)	5	-	3

Questo modello ideale può essere "proiettato" per definire una prospettiva solida, in modo che gli assi della sua prima ed ultima colonna si sovrappongano agli assi della prima ed ultima colonna della Galleria reale (cfr. figure 1.1 e 1.2).

I parametri di trasformazione sono:

Piano delle tracce: posto sugli assi delle prime colonne

Punto di vista: distanza dal piano delle tracce $5 \frac{2}{3}$ palmi; altezza $6 \frac{2}{3}$ palmi [1.5 metri circa]¹²

Punto di fuga: distanza dal piano delle tracce $69 \frac{2}{3}$ palmi.

¹¹ La lunghezza del colonnato ideale è pari a 2.2 volte (o $11/5$) il colonnato reale (lungo in pianta $38 \frac{1}{3}$ palmi, 460 once; sul piano inclinato 38.5 palmi). Si veda l'appendice B per reperire l'indirizzo del sito Internet contenente il modello semplificato del colonnato regolare ideale.

¹² Questo è anche il punto di vista usato per costruire la deformazione della prima colonna. Inoltre, con questi valori la distanza in larghezza tra le penultime due colonne risulta pari a 7 palmi, come indicato dallo stesso Borromini nel disegno conservato presso l'Albertina di Vienna.

3. Approfondimento del meccanismo di deformazione prospettica: definizione dei limiti, degli esiti estremi e delle implicazioni e connessioni esistenti tra costruzione e fruizione visiva

Le osservazioni che seguono si riferiscono ad una costruzione della prospettiva solida corretta dal punto di vista geometrico: senza, dunque, le alterazioni proporzionali caratteristiche della Galleria di Palazzo Spada (cfr. sezione 1).

Lo scopo principale di questi esempi è di mettere in luce il ruolo di ciascun parametro di costruzione e di fruizione visiva: i punti di vista e di fuga, il piano delle tracce e l'occhio dell'osservatore.¹³

Infatti, non solo la scelta dei parametri costruttivi influisce enormemente sul modello deformato - in modo spesso difficile da comprendere e da classificare, pur se geometricamente inevitabile -, ma la stessa fruizione visiva della prospettiva solida segue logiche apparentemente inesplicabili.

Sono state pertanto definite due serie di esempi: la prima - paragrafi 3.1.1-5 - analizza le modificazioni indotte nella prospettiva solida dal variare di uno o più parametri costruttivi (il punto di vista, il punto di fuga o il piano delle tracce); la seconda - paragrafi 3.2.1-3 - studia la fase di ideale ricostruzione del modello regolare, al variare della posizione dell'occhio di un osservatore che esplora la prospettiva solida.

Nel procedere lungo la prospettiva solida, ad esempio, l'altezza dell'osservatore rispetto al pavimento rimane costante. Camminare all'interno di una prospettiva solida con velocità costante, equivale pertanto - all'interno di un ideale modello regolare - ad uno spostamento anche in altezza e con moto sempre più accelerato o rallentato, secondo la direzione.

Osservati entrambi dal punto di vista usato per la costruzione della prospettiva solida, il modello regolare di partenza e la prospettiva solida coincidono.

La sovrapposizione si mantiene anche se il quadro prospettico è ruotato o inclinato: i due modelli rimangono sovrapponibili - in prospettiva - proprio perché le rette, che uniscono ciascun punto del modello regolare al punto di vista, passano anche per gli omologhi punti della prospettiva solida, indipendentemente dalla giacitura del quadro prospettico.

Poiché tutte le semirette irradiate dal punto di vista e passanti per un qualsiasi punto della prospettiva solida, passano anche per l'omologo punto del modello regolare, l'osservatore - con l'occhio nel punto di vista costruttivo - non deve, dunque, necessariamente puntare la vista verso il punto di fuga.

In altre parole, ponendo il fuoco dell'obiettivo di una macchina fotografica nel punto di vista costruttivo, nella fotografia la prospettiva solida e il modello regolare di partenza si sovrapporranno, qualsiasi sia la rotazione dell'obiettivo.

3.1 Modificazioni della prospettiva solida al variare dei parametri (modello regolare costante)

In questi primi cinque esempi il modello regolare è mantenuto costante, mentre i tre parametri costruttivi (punti di vista e di fuga e piano delle tracce) sono variati singolarmente oppure a coppie. La prospettiva solida così prodotta avrà caratteristiche che dipenderanno strettamente da quelle variazioni. Le caratteristiche derivate sono poi combinabili tra loro, generando infinite possibili variazioni complessive.

3.1.1 Variazione della *prospettiva solida* con lo spostamento del *punto di vista* (cfr. figura 3.1.1)

Mantenendo costanti il *modello regolare*, il *punto di fuga* ed il *piano delle tracce*, lo spostamento del *punto di vista* lungo l'asse di simmetria, deforma la *prospettiva solida*. Tale modello si comprimerà nella lunghezza nel caso il *punto di vista* si allontani dal *piano delle fughe*; si espanderà - sempre convergendo verso il *punto di fuga* - nel caso contrario.

3.1.2 Variazione della *prospettiva solida* con lo spostamento del *punto di fuga* (cfr. figura 3.1.2)

Mantenendo costanti il *modello regolare*, il *punto di vista* ed il *piano delle tracce*, lo spostamento del *punto di fuga* lungo l'asse di simmetria deforma la *prospettiva solida*. Tale modello si comprimerà nella lunghezza nel caso il *punto di fuga* si avvicini al *punto di vista*; si espanderà - sempre convergendo verso il *punto di fuga* - nel caso contrario.

3.1.3 Variazione della *prospettiva solida* con lo spostamento del *piano delle tracce* (cfr. figura 3.1.3)

Mantenendo costanti il *modello regolare*, il *punto di fuga* ed il *punto di vista*, lo spostamento del *piano delle tracce* lungo l'asse di simmetria deforma la *prospettiva solida*. Tale modello si ingrandirà nel caso il *piano delle tracce* si allontani dal *punto di vista*; si ridurrà - sempre convergendo verso il *punto di fuga* - nel caso contrario.

3.1.4 Variazione della *prospettiva solida* con lo spostamento solidale del *punto di fuga* e del *piano delle tracce* (cfr. figura 3.1.4)

Mantenendo costanti il *modello regolare* e il *punto di vista*, lo spostamento, solidale tra loro, del *punto di fuga* e del *piano delle tracce* modifica la scala della *prospettiva solida*. Tale modello si ingrandirà - mantenendo costanti le proporzioni tra le sue parti - se il *punto di fuga* ed il *piano delle tracce* si allontanano dal *punto di vista*; si ridurrà - sempre convergendo verso il *punto di fuga* - nel caso contrario.

3.1.5 Variazione della *prospettiva solida* con lo spostamento del *punto di vista* e del *punto di fuga* rispetto all'asse del *modello regolare* (cfr. figura 3.1.5)

Nel caso il *punto di vista* ed il *punto di fuga* definiscano una retta che non appartiene al piano verticale di simmetria del *modello regolare*, la *prospettiva solida* così costruita non manterrà la simmetria destra-sinistra, ma si genererà un modello "sghebo". Variando invece l'altezza del *punto di vista* rispetto al *punto di fuga* (posti sul piano di simmetria del *modello regolare*), la *prospettiva solida* manterrà invece, com'è evidente, la simmetria destra-sinistra: le uniche differenze si apprezzeranno sulle altezze.

¹³ Per una analisi geometrica sui metodi di costruzione di una prospettiva solida si veda l'appendice A. Per la nomenclatura l'appendice C.

3.2 Modificazioni del modello regolare al variare dei parametri (prospettiva solida costante)

In questi esempi è la prospettiva solida che rimane costante, mentre l'osservatore pone l'occhio in posizioni diverse dal punto usato per costruire la prospettiva solida stessa. Egli dunque vedrà - dal punto di vista geometrico - un modello regolare diverso da quello di partenza (sarebbe identico solo se l'occhio dell'osservatore fosse posto nel punto di vista costruttivo). Alcune "regolarità" saranno mantenute - come, ad esempio, la scansione degli interassi -, altre subiranno delle variazioni.

3.2.1 Variazione del modello regolare con lo spostamento dell'occhio dell'osservatore lungo la retta per il punto di vista e il punto di fuga (cfr. figura 3.2.1)

Ponendo l'occhio in un qualsiasi altro punto della retta per il *punto di vista* e il *punto di fuga* che non sia il *punto di vista*, la *prospettiva solida* e il modello *regolare* non coincidono. Tuttavia, per ogni punto di osservazione posto sulla retta, esiste un *modello regolare* - diverso dall'originale - anch'esso regolare: l'unica differenza tra questi infiniti *modelli regolari* e il modello regolare originale è data da una compressione lungo l'asse e dunque, in questo esempio, dal diverso interasse tra le colonne. Se l'occhio si avvicina al *punto di fuga* l'interasse si comprimerà; si espanderà invece se l'occhio si allontana dal *punto di fuga*.

3.2.2 Variazione del modello regolare con lo spostamento dell'occhio dell'osservatore sopra o sotto la retta per il punto di vista e il punto di fuga (cfr. figura 3.2.2)

Se l'occhio si alza o si abbassa rispetto al *punto di vista*, il *modello regolare* non è più del tutto regolare: il pavimento, infatti, si inclina verso l'alto o verso il basso. È tuttavia da notare che le colonne del "modello regolare" così restituito rimangono comunque parallele tra loro e tutte della medesima altezza: l'osservatore che ponga l'occhio più in alto rispetto al *punto di vista* vedrà dunque una rampa discendente ma regolare; se l'occhio è abbassato la rampa sarà ascendente, ma sempre regolare.

3.2.3 Variazione del modello regolare con lo spostamento dell'occhio dell'osservatore a destra o a sinistra della retta per il punto di vista e il punto di fuga (cfr. figura 3.2.3)

Se l'occhio si sposta a destra o a sinistra rispetto al *punto di vista*, come cambia il *modello regolare*? In tal caso la galleria diviene sghemba, pur mantenendo paralleli tra loro i colonnati. È del tutto evidente che si possono sommare gli effetti: se l'osservatore sposta l'occhio più avanti, sopra e, ad esempio, a sinistra rispetto al *punto di vista*, egli vedrà una galleria regolare restituita con gli interassi tra le colonne compressi rispetto al *modello regolare* standard (occhio spostato più avanti rispetto al *punto di vista*). L'osservatore vedrà inoltre la galleria come una rampa discendente (poiché il suo occhio si trova sopra il *punto di vista*), ed infine vedrà anche la rampa come sghemba verso la sua destra.

Appendice A

Metodi geometrici per la definizione della prospettiva solida

Metodo A¹⁴, cfr. figura A.1.

Si suppone dato - in pianta e in prospetto - l'oggetto da riprodurre, nel nostro caso una scatola.

Si fissa la posizione dell'occhio in O; si assegnano il *piano delle tracce* e il piano del pavimento, inclinato rispetto al piano orizzontale. Il punto A avrà come immagine nello spazio illusorio il punto individuato da A', in pianta, e A'', in alzato. Tramite la pianta e l'alzato di ogni singolo punto, possiamo senz'altro ricostruire nello spazio la prospettiva solida dell'oggetto dato. Se per O tracciamo la parallela al piano π_2 , F è il punto di fuga della prospettiva solida, per dove passa il *piano delle fughe*. L'occhio, posto nel punto O, vedrà coincidere la scatola oggetto con la scatola deformata.

Metodo B, cfr. figura A.2.

Anche questo metodo - come tutti gli altri - mantiene l'orizzontalità dei segmenti paralleli al piano delle tracce e la verticalità di tutti i segmenti (i segmenti paralleli al piano delle tracce si mantengono tali nella trasformazione).

Si devono definire le coordinate di O e due rette: r_3 che indica l'andamento del modello reale, r_4 che indica l'andamento del modello deformato.

Per ogni punto A del modello (nell'esempio, A appartiene al modello ideale, non deformato; ma lo stesso algoritmo si applica anche al contrario, per trovare il modello ideale a partire da quello deformato):

- Si definisce la retta O-A (r_1).
- Si definisce la retta orizzontale per A.
- Si trova l'intersezione A₁ con r_3 (andamento del modello reale).
- Si definisce la retta per A₁-O (r_2).
- Si trova l'intersezione A₂ con r_4 (andamento del modello deformato).
- Si definisce la retta orizzontale per A₂.
- Si trova l'intersezione A₃ con r_1 . A₃ è il punto cercato.
- Conoscendo l'altezza di A rispetto ad O (A-A'), si trova l'altezza A₃-A'' (sempre rispetto ad O), per mezzo dei due triangoli simili AA'O e AA₃A''.

Metodo C, cfr. figura A.3.

Il metodo si fonda ancora una volta sulle proprietà dei triangoli simili e, da un punto di vista algoritmico, si traduce nell'applicazione di un fattore di scala, omogeneo e variabile, alle coordinate X, Y, Z del punto A. Il fattore di scala avrà il valore $OF/(OF+AC)$ con polo in O, dove OF è la distanza tra il punto di vista e il punto di fuga e AC è la distanza del punto A dal piano delle tracce. Il segmento AC è considerato con valore positivo se A, rispetto al Piano delle tracce, è posto verso F; negativo se posto verso O. Pertanto, il fattore di scala sarà minore di 1 per tutti i punti posti nel semipiano, definito dal piano delle tracce, che contiene F ($OF+AC > OF$, se AC positivo), maggiore di 1 per tutti i punti posti nell'altro semipiano ($OF+AC < OF$, se AC negativo) e uguale a 1 per tutti i punti posti sul piano delle tracce. Il segmento OF è costante, per tutte le trasformazioni dei punti. Quando il segmento AC è nullo, il fattore di scala sarà dunque uguale a 1: infatti, sul piano delle tracce i due modelli coincidono e non vi è deformazione. Se AC è pari, ad esempio, alla metà di OF - con A verso F - il fattore di scala sarà pari a 2/3; se invece AC è congruente con OF, il fattore di scala sarà 0.5, e così via. Nella figura A.3, AC è pari a 0.18 volte OF e dunque il fattore di scala è 0.8475.

Da notare un caso particolare: se il segmento AC è congruente a OF ed il punto A è posto nel semipiano che contiene O (AC negativo), il fattore di scala non è calcolabile. Infatti, algebricamente il fattore di scala è $OF/0$ e, dal punto di vista geometrico questa configurazione prevede che le rette per CF e AO siano parallele tra loro, non potendo pertanto identificare A₁ nel loro punto di intersezione, se non come punto improprio.

Se - in quella stessa configurazione, con A nel semipiano di O - il segmento AC fosse addirittura maggiore di OF, si otterrebbe un'inversione di simmetria del punto A₁ rispetto alla retta per OF (fattore di scala negativo). Dunque, questi metodi sono applicabili solo per configurazioni che prevedano - se A è posto verso O - un segmento AC minore di OF.

¹⁴ Al riguardo si veda: Rocco Sinisgalli, *Una storia della scena prospettica...*, op. cit, p. 85.

Appendice B

Manuale d'uso del programma BURBON, per la generazione di prospettive solide

Il programma BURBON consente di generare modelli di prospettive solide - o di contro-deformarle in modelli regolari - definendo un modello tridimensionale DXF, un *Punto di Vista*, un *Punto di Fuga* ed un *Piano delle tracce*.

Le entità del modello di partenza sono contenute in un file di tipo DXF di grandezza indefinita. Sono modificate le entità i cui punti appartengono ai gruppi DXF 10..17, 20..27, 30..37. Possono dunque essere trasformate 3Dfacce, linee, punti, polilinee 3D, tracce, testi ecc. I blocchi, le entità Mesh e i solidi AME devono essere "esplosi" ripetutamente per ottenere le singole entità primitive che li compongono. Nel caso di solidi AME (solo per le versioni 11 e 12 di AutoCAD) è opportuno, prima della loro "esplosione", applicare il comando MESH che consente di ottenere facce 3D e non semplici linee. In questo modo, una volta importato nuovamente in AutoCAD il modello deformato, si potranno cancellare le linee nascoste, applicando il comando NASCONDE [HIDE]. È da notare che, nella "esplosione" dei solidi, AutoCAD (dalla versione 13 in poi) produce - anziché linee o facce 3D - entità di tipo Body che non possono essere trasformate correttamente dal programma.

Il programma BURBON (che prende il suo nome da Guidubaldo Burbon dal Monte) opera nel modo seguente:

- Viene prima costruito dall'utente il modello regolare tridimensionale (da memorizzare nel formato DXF, versione 12) composto da facce (preferibilmente), polilinee 3D, punti, linee, ecc. Il modello sarà posto nello spazio in modo da avere il suo asse (l'asse che collegherà il *Punto di Vista* al *Punto di Fuga*) parallelo all'asse Y.
- Dal menu **Proietta** del programma BURBON si attiva il comando **Proietta modello 3D...**
- Verrà chiesto di inserire il nome del file di ingresso (file di tipo DXF); il file di uscita (che conterrà il modello trasformato dal programma) e le coordinate del *Punto di Vista* (X, Y, Z), del *Punto di Fuga* (solo la coordinata Y, poiché le coordinate X e Z saranno le stesse del PV) e del *Piano delle tracce* (anche in questo caso solo la coordinata Y, poiché il piano è considerato parallelo al piano XZ). Il PV ed il PF non devono coincidere tra loro, né essere posti sul *Piano delle tracce*. La retta PV-PF è parallela all'asse Y e ortogonale al *Piano delle tracce*. Su questo piano il modello di partenza e di arrivo coincidono.
- Se è attivato il segno di spunta sulla voce **Deformazione del modello** (menu **Proietta**), il modello regolare di ingresso verrà deformato nella prospettiva solida di uscita (deformazione diretta). In caso contrario (assenza del segno di spunta, ottenuta selezionando il comando stesso), il modello deformato di ingresso verrà contro-deformato nel modello regolare di uscita (deformazione inversa).
- Se è attivato il segno di spunta sulla voce **Scrivo punti su file** (menu **Proietta**), il programma creerà un file in formato ASCII (avente lo stesso nome base del file di uscita e suffisso CDR) contenente le coordinate di partenza e di arrivo di tutti i punti trasformati.
- Poiché il programma genera automaticamente un file ASCII (avente lo stesso nome base del file di uscita e suffisso PRM) contenente i parametri di trasformazione prospettica (coordinate PV, PF e *Piano delle tracce*), sarà possibile richiamare successivamente un tale file mediante il comando **Carica parametri...** (menu **Proietta**).
- Il programma genera o aggiorna automaticamente anche un file ASCII (avente lo stesso nome base del file di ingresso e suffisso HST), contenente la sequenza di tutti i valori usati dal programma, partendo da quel file di ingresso: sarà così possibile ricostruire facilmente le varie prove eseguite sullo stesso modello di partenza.

Il programma (comprese queste istruzioni, in formato HTM, e un file DXF di esempio, contenente un modello assai semplificato della galleria regolare ideale illustrata nella sezione 2) è contenuto nel CD-ROM, nella cartella BURBON, e nel sito Internet: <http://www.iuav.unive.it/dpa/ricerche/trevisan/burbon.htm>

Per ottenere dal modello di esempio la prospettiva solida più vicina alla Galleria reale di Palazzo Spada, si dovrà indicare, come file di ingresso, il file BASE.DXF e usare come parametri di trasformazione i seguenti valori, già indicati nella sezione 2: X PV = 0.0; Y PV = -5.6666; Z PV = 6.6666; Y PF = 69.6666; Y Quadro = 0.0.

Appendice C

Nomenclatura

Modello regolare. È il modello tridimensionale regolare di partenza senza la deformazione prospettica. Nel caso di un colonnato simile a quello di Palazzo Spada, gli intercolunni sono tutti uguali tra loro, così come tutti gli altri elementi ripetitivi (abachi, capitelli, basi, ecc.); le trabeazioni sono orizzontali e quella destra è parallela alla sinistra. La volta della galleria è semicircolare.

Prospettiva solida. È il modello tridimensionale che ha subito la deformazione prospettica.

Punto di vista. È la posizione che deve assumere l'occhio dell'osservatore per far coincidere il *modello regolare* con la *prospettiva solida*: nessun'altra posizione permette tale sovrapposizione. È anche usato come parametro costruttivo della *prospettiva solida*.

Punto di fuga. È il vertice della piramide che "contiene" la *prospettiva solida*. Anche questo punto è usato - assieme al *punto di vista* e al *piano delle tracce* - come parametro per la generazione della *prospettiva solida*.

Occhio. È la posizione dell'occhio dell'osservatore: può coincidere o no con il *punto di vista*. Nel primo caso il *modello regolare* (costruito per mezzo del *punto di vista*) si sovrappone alla *prospettiva solida*; nel secondo caso non si sovrappone.

Piano di proiezione. È il piano che raccoglie l'immagine di una prospettiva piana ed è assimilabile al piano della pellicola contenuta in una macchina fotografica.

Piano delle tracce. È il piano, perpendicolare alla retta per il *punto di vista* e per il *punto di fuga*, usato per costruzione della *prospettiva solida*. Tutti gli elementi del *modello regolare* che giacciono su questo piano non subiscono alcuna deformazione prospettica né di scala.

Deformazione diretta. È la trasformazione che - usando i parametri appena citati - permette di passare dal *modello regolare* alla *prospettiva solida*.

Deformazione inversa. È la trasformazione che - usando i parametri appena citati - permette di passare dalla *prospettiva solida* al *modello regolare*.

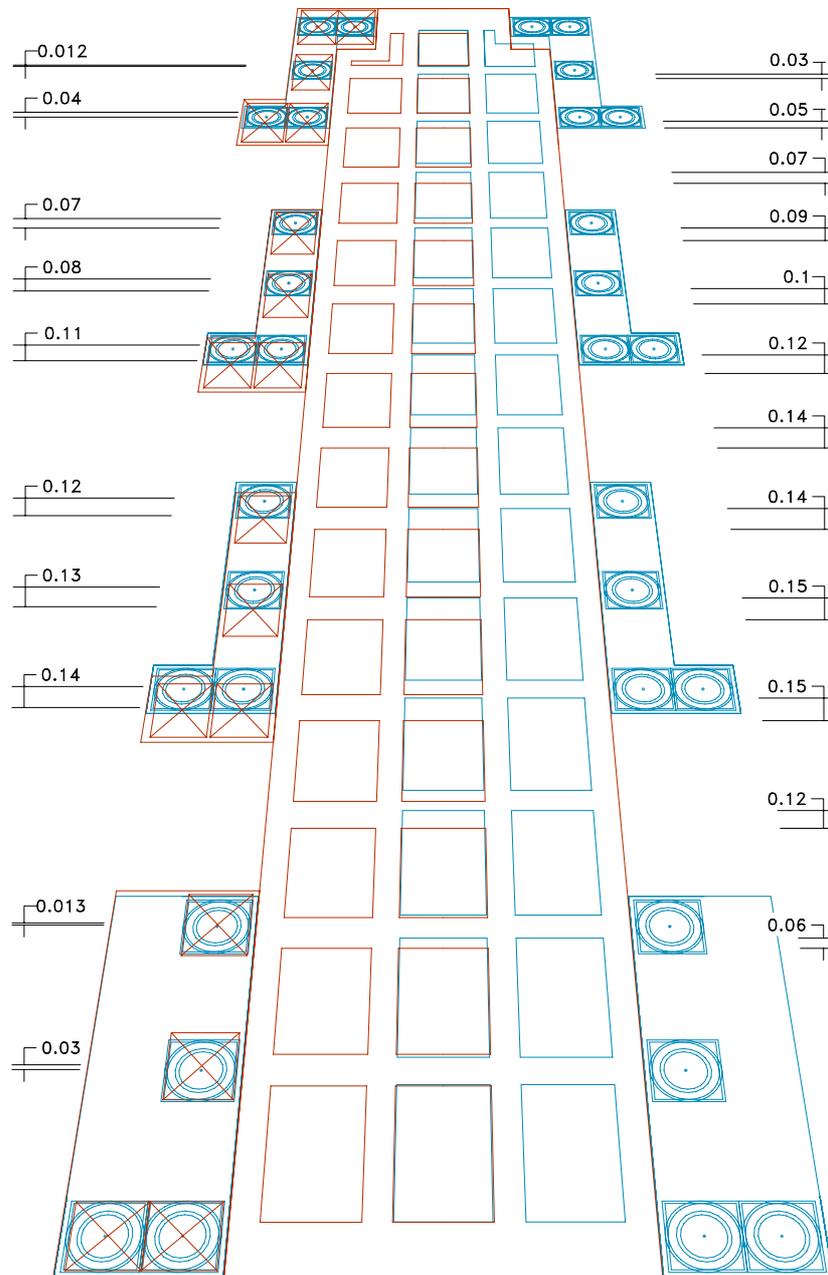


Figura 1.1 Confronto tra pianta della Galleria reale (in rosso) e del modello regolare deformato con metodo prospettico (in blu), in modo da far coincidere gli assi delle sue prime ed ultime colonne con gli omologhi assi della Galleria reale. A sinistra, sono evidenziati gli scarti tra gli assi, in metri. A destra gli scarti tra i riquadri. Lo scarto quadratico medio, per gli assi, è pari a 8 centimetri; quello per i riquadri a 10 centimetri.

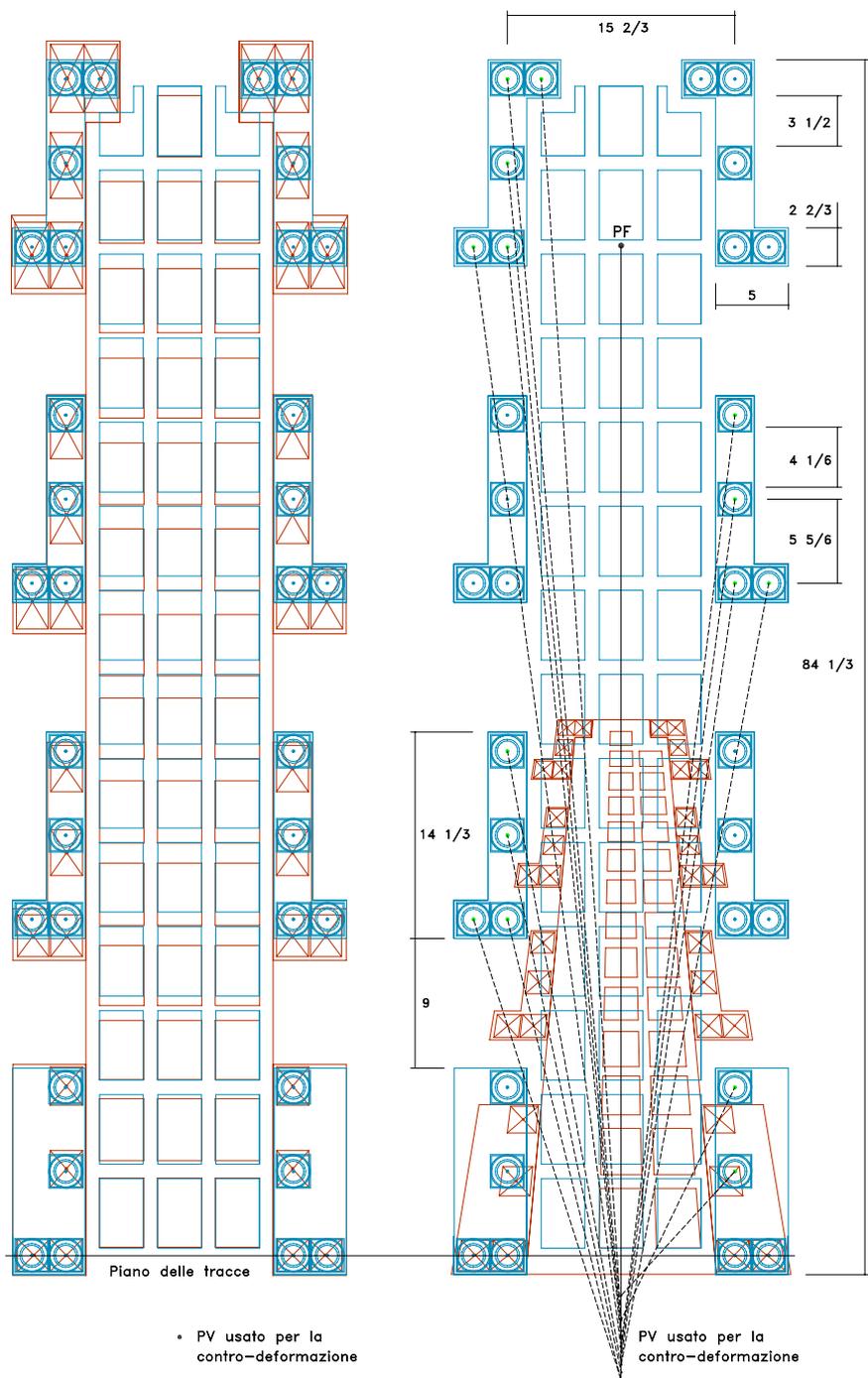


Figura 1.2 A sinistra, confronto tra il modello regolare ideale (in blu) e la contro deformazione della Galleria reale (in rosso). A destra, verifica della presenza di più di un punto di vista e quote del modello regolare *ideale* (cfr. sezione 2).

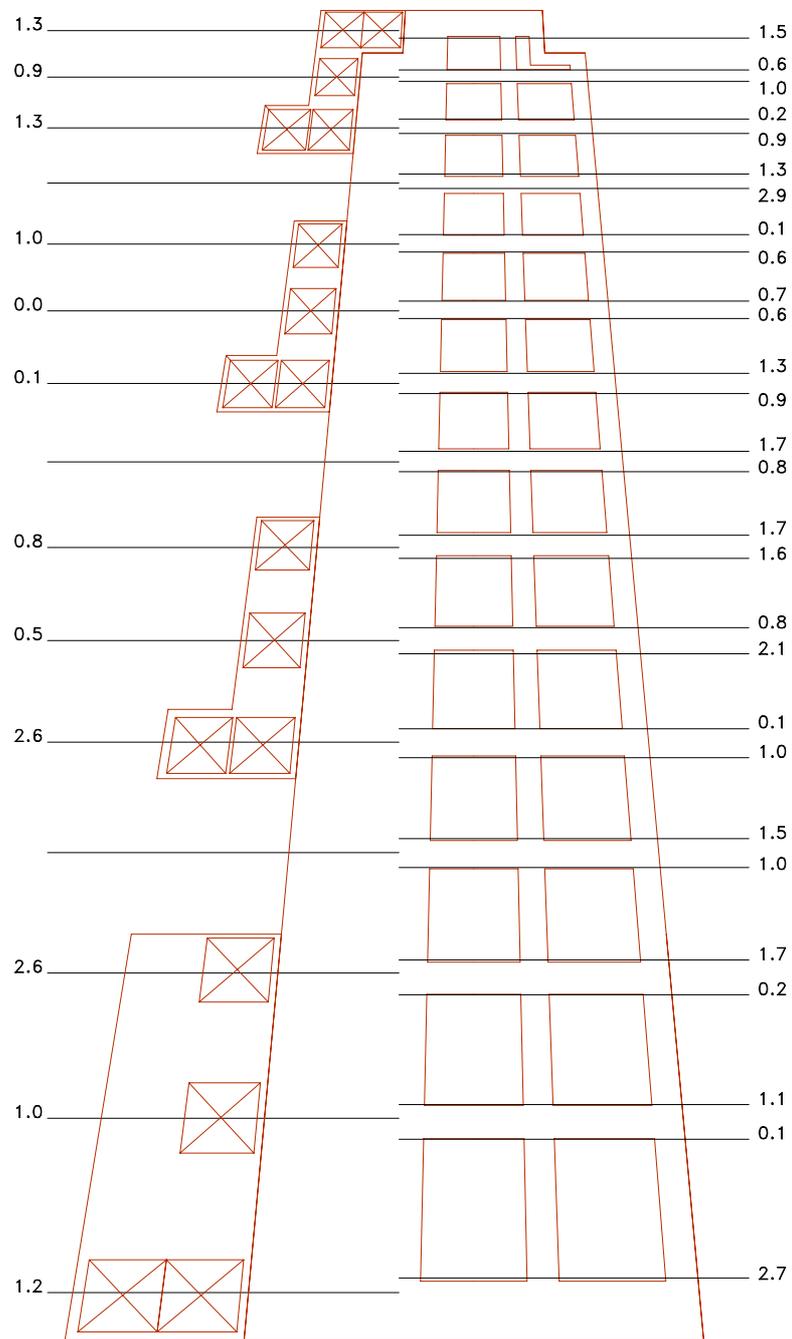


Figura 1.3 Confronto tra la pianta della Galleria reale (in rosso) e le scansioni generate dalla serie geometrica illustrata nella sezione 1. A destra sono mostrati gli scarti tra gli assi, in centimetri. A sinistra, gli scarti tra i riquadri. Scarto quadratico medio di circa 1 centimetro, sia per gli assi, sia per i riquadri.

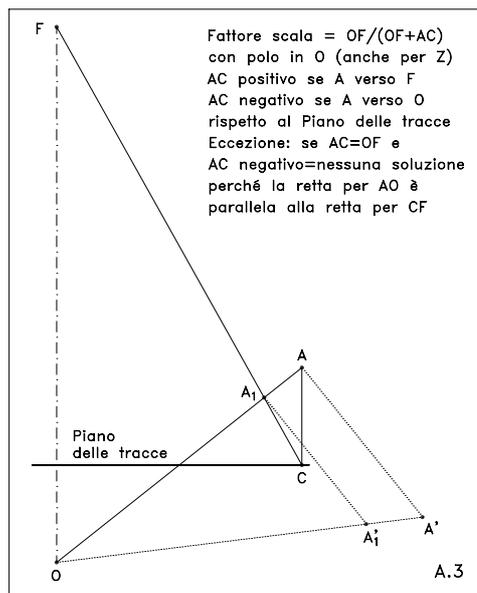
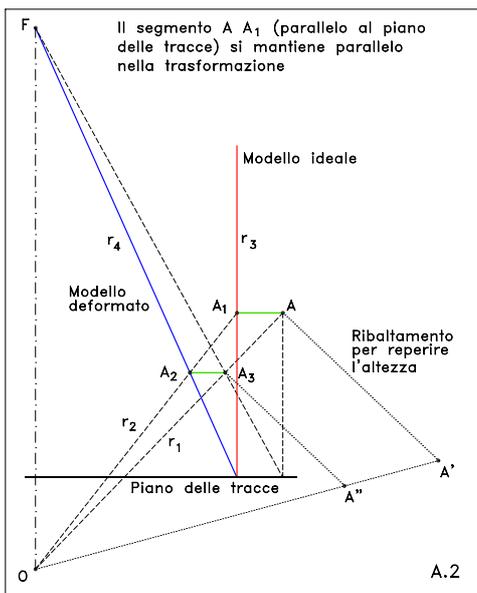
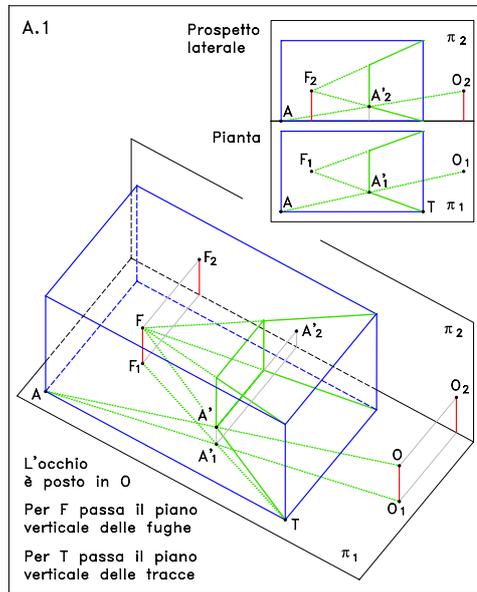
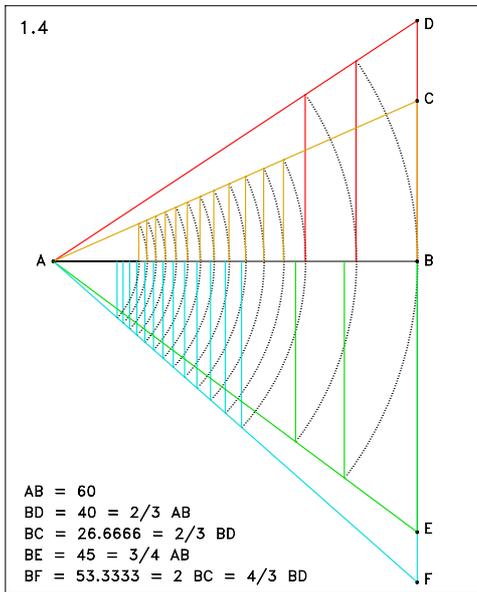


Figura 1.4 Metodo grafico per la costruzione della serie geometrica di riduzione. Definiti i segmenti AB (60 onces, primo interasse), BC (26.666 onces), BD (40 onces), BE (45 onces) e BF (53.333 onces), puntando il compasso in A con apertura AB, si traccia il primo arco a incrociare il segmento AD. Abbassando la perpendicolare ad AB, si definisce la lunghezza del secondo interasse, e così via. La retta AD corrisponde ad una riduzione pari a 0.8321 ($5/6 = 0.8333$, differenza 0.0012); la retta AC a 0.9138 ($11/12 = 0.91666$, differenza 0.0029); AE a 0.8 ($4/5 = 0.8$) ed infine AF a 0.7474 ($3/4 = 0.75$, differenza 0.0026).

Figure A.1-3. Metodi grafici di costruzione della prospettiva solida (cfr. appendice A).

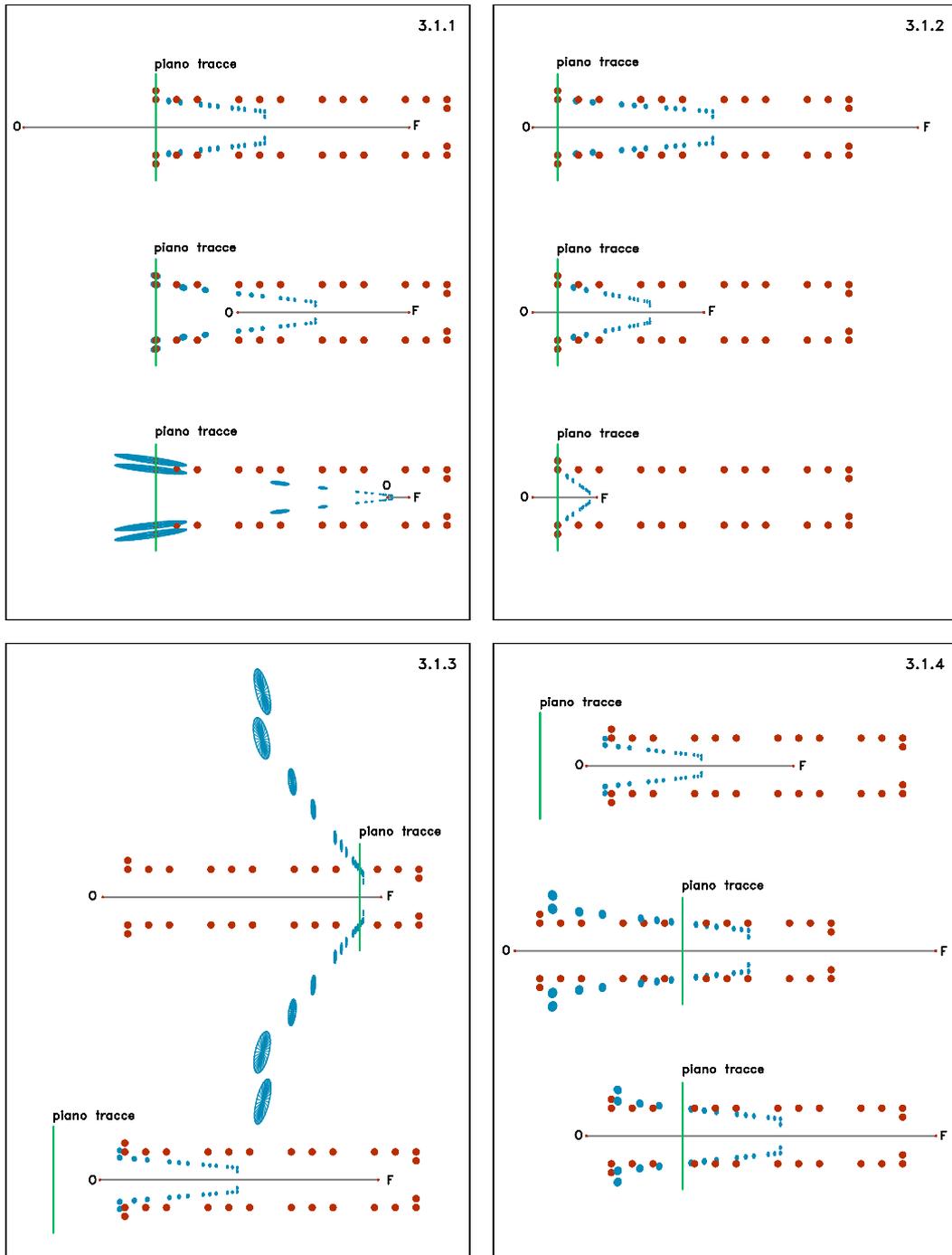


Figure 3.1.1-4 Abaco delle deformazioni prospettive (cfr. sezione 3). In colore rosso è indicato il modello di partenza, costante e da deformare; in colore blu quello deformato. Il punto di vista è in O; il punto di fuga in F.

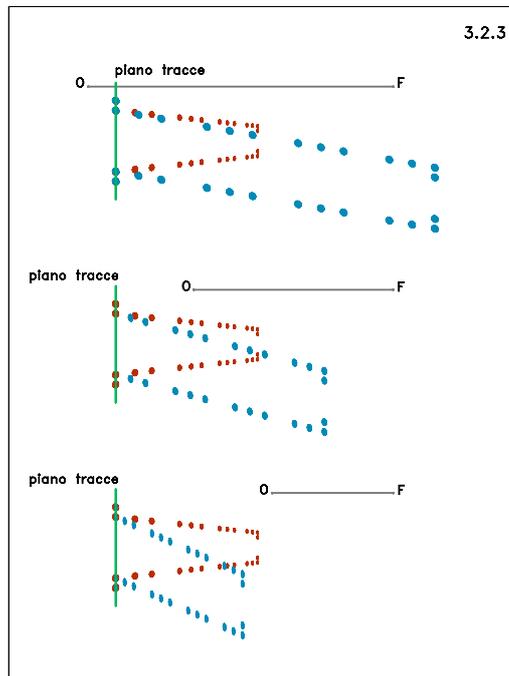
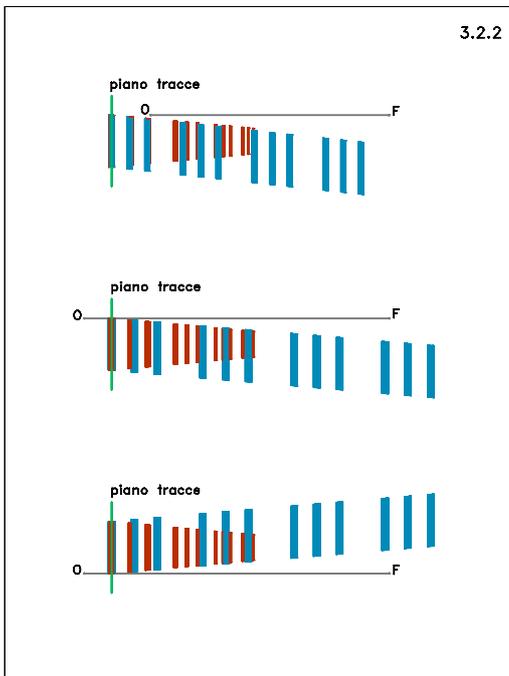
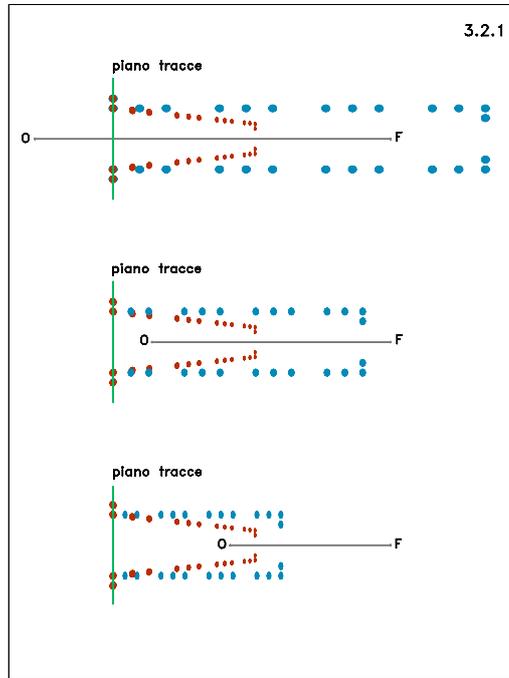
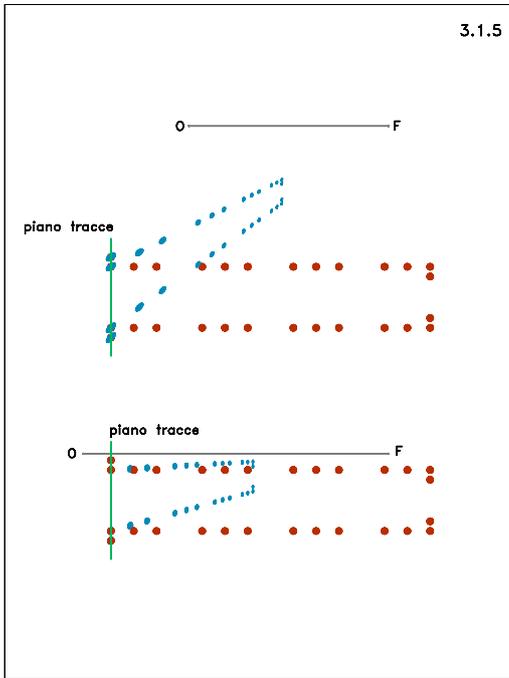


Figure 3.1.5 e 3.2.1-3 Abaco delle deformazioni prospettive (cfr. sezione 3). In colore rosso è indicato il modello di partenza, costante e da deformare (figura 3.1.5) o da contro deformare (figure 3.2.1-3); in colore blu quello deformato o contro deformato. Il punto di vista è in O; il punto di fuga in F.