

Camillo Trevisan

GEOMETRIE AL COMPUTER

Manuale del programma CARTESIO 3.0
per la didattica e l'applicazione interattiva
delle proiezioni geometriche e dei fondamenti del CAD

Marchi registrati

AutoCAD è un marchio registrato da AutoDESK.

DoDot è un marchio registrato da Halcyon Software.

Paint Shop Pro è un marchio registrato da JASC Inc.

Pentium è un marchio registrato da Intel.

Photoshop è un marchio registrato da Adobe.

Windows e DOS sono marchi registrati da Microsoft.

I programmi CARTESIO e ZEUS, contenuti nel dischetto allegato al manuale, sono forniti senza alcuna garanzia, esplicita o implicita, relativa alla loro idoneità per applicazioni specifiche.

L'autore declina pertanto ogni responsabilità, morale o materiale, derivante dall'uso dei programmi CARTESIO e ZEUS.

I programmi CARTESIO e ZEUS possono essere copiati e distribuiti solo gratuitamente e senza alcun fine di lucro.

Tutti i diritti sono riservati. Stampato in Italia.

Nessuna parte di questo libro, ad esclusione dei programmi CARTESIO e ZEUS, può essere riprodotta, memorizzata in sistemi d'archivio o trasmessa in qualsiasi forma o mezzo elettronico, fotocopia, registrazioni o altri, senza la preventiva autorizzazione scritta dell'editore.

Indice

7	Introduzione	
11	Capitolo 1	Installazione del programma CARTESIO
17	Capitolo 2	Fondamenti
17	2.1	Premessa
18	2.2	Nozioni di base per l'uso di CARTESIO
19	2.3	Terna degli assi cartesiani
20	2.4	Quadranti e piani cartesiani
21	2.5	Proiezione e sezione
23	2.6	Proiezioni ortogonali
23	2.7	Proiezioni assonometriche ortogonali
25	2.8	Proiezioni assonometriche oblique
26	2.9	Proiezioni prospettiche
28	2.10	Finestra di vista: <i>window</i> e <i>viewport</i>
29	2.11	Trasformazioni geometriche
32	2.12	Vettori e matrici di trasformazione
38	2.13	<i>Shading</i> , superfici e <i>wire-frame</i>
43	Capitolo 3	Sessione di lavoro di esempio
43	3.1	Avvio di CARTESIO
44	3.2	Aprire una finestra di rappresentazione
45	3.3	Analisi di una finestra di rappresentazione
47	3.4	Scegliere uno dei solidi predefiniti
49	3.5	Modificare la rappresentazione
52	3.6	Modificare la finestra di rappresentazione
69	3.7	Aprire più di una finestra di rappresentazione
91	3.8	Applicare le trasformazioni geometriche
103	3.9	Deformare gli oggetti
111	3.10	Sezionare gli oggetti
111	3.11	Stampare una finestra di rappresentazione e creare immagini
113	3.12	Creare un file DXF della finestra di rappresentazione attiva
115	3.13	Aprire un file DXF generato da altri programmi
117	3.14	Modificare un file DXF generato da altri programmi
122	3.15	Salvare e riaprire una sessione di lavoro

123 Capitolo 4 Uso della tastiera e del mouse

- 123 4.1 I tasti usati per modificare le proiezioni
- 128 4.2 Uso del mouse per tutte le proiezioni
- 128 4.3 Proiezioni ortogonali
- 129 4.4 Proiezioni assonometriche ortogonali
- 130 4.5 Proiezioni assonometriche oblique
- 131 4.6 Proiezioni prospettiche

135 Capitolo 5 Comandi presenti nei menu di CARTESIO

- 135 5.1 La selezione di un comando
- 135 5.2 Menu File
- 139 5.3 Menu Solidi
- 141 5.4 Menu Proiezioni
- 144 5.5 Menu Trasformazioni
- 149 5.6 Menu Finestre
- 150 5.7 Menu Vista
- 152 5.8 Menu Help

153 APPENDICE A Analisi del riquadro *Informazioni***159 APPENDICE B Solidi predefiniti****175 APPENDICE C Alcune proiezioni predefinite****215 APPENDICE D Soluzione dei principali problemi****231 APPENDICE E Il programma ZEUS****239 APPENDICE F Tavola sinottica dei comandi di CARTESIO****245 Indice analitico**

Studiando la geometria proiettiva, spesso ci si ritrova con lo sguardo assorto, cercando di comprendere la configurazione spaziale di una proiezione e i suoi esiti sul quadro. Come è disposto l'oggetto rispetto agli assi, e il quadro rispetto all'oggetto e al centro di proiezione? La direzione di proiezione incide perpendicolarmente il quadro oppure è inclinata, e di quanto?

Di frequente le risposte date sono imprecise o addirittura errate, vista la difficoltà di trovare prove certe e non deduttive, di prevedere sempre correttamente il disporsi degli elementi nelle tre dimensioni dello spazio e la loro proiezione su di un piano.

CARTESIO, il programma illustrato in questo manuale, aiuta a trovare risposte, sia visive sia numeriche, a quelle e ad altre possibili domande nel campo della geometria proiettiva. Non si limita infatti a fornire la proiezione ortogonale, assonometrica o prospettica di uno o più oggetti - come una calcolatrice che provveda il risultato di un'operazione complessa e come, nella fattispecie, farebbe un programma CAD - ma consente soprattutto di analizzare e valutare tutti gli elementi di contorno, essenziali però per la comprensione vera del meccanismo della proiezione.

Lo studente riduce di frequente la complessità spaziale della proiezione ad una serie di più semplici e meccaniche operazioni bidimensionali, ad una prassi che però non contiene che un pallido "ricordo" delle motivazioni originali: riesce forse, lo studente, a produrre un grafico corretto, ma senza sapere bene perché debba essere tracciato in quel modo, quasi seguendo una ricetta più o meno gelosamente e orgogliosamente custodita. Oltre a porgere il fianco a madornali errori, questa consuetudine riduce la comprensione spaziale e la stessa capacità di lettura di un disegno.

Con l'avvento del CAD, poi, diventa sempre meno necessaria anche la semplice pratica manuale del disegno, rischiando di rimuovere l'ultimo, esile, cordone ombelicale che lega il progetto alla sua rappresentazione, fase che aiuta il progettista a "conoscere" gli oggetti che va creando.

Vedere, capire e disegnare costituiscono pertanto tre anelli importanti della progettazione, specie di quella architettonica, e cardinali nel campo della rappresentazione. Affiancandosi alla necessaria trattazione teorica senza sostituirla, il programma CARTESIO consente di approfondire questi aspetti essenziali, fornendo anzitutto una tassonomia completa dei metodi proiettivi.

Oltre alle decine di proiezioni predefinite, l'utente potrà anche costruire una proiezione generica per ogni classe, immettendo direttamente i dati di costruzione. Potrà, per tutte le proiezioni, modificare le forme di rappresentazione, ad esempio ruotando la direzione di proiezione attorno all'origine, sempre però mantenendo ferma la relazione tra finestra di vista e classe della proiezione. In tal modo sarà possibile scandagliare tutte le possibili configurazioni di una classe, confrontando sempre i risultati visivi con una serie di informazioni numeriche. Ad esempio gli angoli tra il piano di proiezione e gli assi o i piani cartesiani oppure gli angoli formati tra loro

dagli assi proiettati o gli scorciamenti subiti da versori posti lungo gli assi.

Per ogni proiezione l'utente vedrà sempre (in quattro diverse forme: tre proiezioni ortogonali ed una assonometrica) il disporsi del quadro e della direzione di proiezione rispetto agli assi e, volendo, la linea dell'orizzonte e il cerchio delle distanze nelle prospettive o anche, in una o più proiezioni, il quadro relativo ad un'altra proiezione di riferimento.

Come si modifica la rappresentazione, e come cambiano i relativi valori numerici, spostando, ad esempio, a poco a poco il centro di proiezione verso destra o sinistra in una prospettiva a quadro frontale? Oppure avvicinando o allontanando il centro di proiezione all'oggetto? Spesso l'analisi attenta dei risultati e dei parametri consentirà allo studente di capire meglio i meccanismi proiettivi e di crearsi quel bagaglio di conoscenze e di esperienze, necessario sia alla produzione dei disegni sia alla loro corretta comprensione.

Oltre che al controllo completo dei parametri proiettivi, CARTESIO è anche propedeutico all'uso di programmi CAD, non solo permettendo tutte le possibili trasformazioni geometriche, le sezioni dei solidi o la loro deformazione, ma soprattutto consentendo l'analisi e l'uso delle matrici di trasformazione (geometrica e proiettiva), base logica dei programmi di grafica per elaboratore elettronico. Lo studente si familiarizzerà dunque con concetti e metodi che ritroverà poi, in forma più criptica e spesso implicita, nei programmi di computer grafica e nel CAD.

Sarà consentito, ad esempio, costruire un'assonometria di una prospettiva o viceversa, oppure verificare gli effetti di una matrice di trasformazione geometrica applicata ai punti selezionati. Gli esiti, ad esempio, della rotazione di un oggetto attorno ad un asse generico avranno per lo studente un immediato riscontro visivo e numerico ed egli sarà guidato verso un uso del programma prettamente numerico-matematico, caratteristica tipica dei programmi CAD.

Progettare con programmi CAD, infatti, richiede una completa revisione metodologica. Basti pensare, ad esempio, che mentre nel disegno tradizionale sono generate delle rappresentazioni del modello progettuale (modello che resta eminentemente "mentale"), nella progettazione assistita da computer si costruisce invece il modello stesso, nelle tre dimensioni, quasi fosse un modello concreto. Da questo si trarranno le rappresentazioni volute e necessarie sia alla sua comprensione e trasmissione visiva, sia alla sua stessa costruzione.

La conoscenza delle basi della geometria analitica, oltre a costituire un buon viatico per coloro che si apprestano all'impiego del CAD, unita ai principi della geometria descrittiva, permette di "vedere" e organizzare lo spazio, di indagarlo approfonditamente, di trovare riscontri analitici a metodi grafici o viceversa.

In breve, per chi lo voglia, di capire, veramente.

Il manuale tratta anche del programma ZEUS che consente di proiettare un oggetto generico su di una superficie generica, estendendo dunque *ad libitum* le già vaste configurazioni proiettive offerte da CARTESIO.

Si potranno in tal modo ottenere proiezioni su superfici sferiche, coniche, cilindriche, su ellissoidi o paraboloidi, su quinte scenografiche piane e curve.

Le contro-proiezioni potranno poi essere ortografiche, stereografiche, sviluppate o proiettate su di un piano comunque disposto nello spazio.

Post scriptum. Questo manuale è stato redatto con la consapevolezza che non sarà letto. O meglio, che sarà letto in parte e in modo disordinato, come del resto avviene per tutte le guide, desiderando usare al più presto il programma senza curarsi dei “dettagli”. Pertanto i concetti, specie quelli essenziali, sono ripetuti più volte, in diversi capitoli, per evitare che siano trascurati e vadano perduti.

Un normale utente di computer, con una discreta esperienza di programmi Windows e di geometria elementare, può iniziare subito ad usare il programma, possibilmente seguendo il Capitolo 3 che illustra, mediante un esempio di sessione di lavoro, quasi tutte le funzioni di CARTESIO e molte delle sue possibilità.

Volendo invece avere informazioni dettagliate su ogni singola voce di menu è utile vedere il Capitolo 5, mentre tutte le possibili modificazioni delle proiezioni sono illustrate nel Capitolo 4. Il Capitolo 2, infine, è riservato agli utenti più inesperti o per approfondire qualche voce poco nota, mentre il Capitolo 1 è dedicato all’installazione di CARTESIO, del resto assai semplice.

Capitolo 1

Installazione del programma CARTESIO

CARTESIO è un programma grafico che richiede pertanto, da un lato, computer potenti e veloci e, dall'altro, schermi video sufficientemente grandi e dotati di una buona risoluzione per la corretta rappresentazione dei grafici, specie nell'uso con molte finestre aperte contemporaneamente.

Per un uso produttivo del programma CARTESIO è dunque necessario possedere un computer 386, 486, Pentium o altre versioni compatibili, dotato del sistema operativo Windows 3.1, NT, 95 o versione successiva (o SoftWin per i sistemi Macintosh) e uno schermo, preferibilmente almeno da 17 pollici, con una risoluzione minima consigliata di 1024x768 pixel. In ogni caso qualsiasi configurazione Windows è in grado di eseguire il programma ma, se la risoluzione è inferiore a quella consigliata, non sempre sarà possibile ottenere in modo soddisfacente tutte le funzioni offerte dal programma.

Le figure 1-1, 1-2, 1-3 e 1-4 mostrano lo schermo grafico di CARTESIO con quattro finestre aperte alle risoluzioni, rispettivamente, di 640x480 pixel, 800x600, 1024x768 e 1280x1024 pixel. Anche a prima vista, pur con immagini piccole, senz'altro si coglie la differenza di risoluzione, accuratezza di rappresentazione e quantità di informazioni proposte.

Le indicazioni che seguono sono anche utili per l'installazione e l'uso del programma ZEUS, allegato allo stesso dischetto, che permette di proiettare entità DXF su una superficie generica formata da un massimo di 5400 facce tridimensionali (vedi Appendice E).

Anche i programmi CARHLP e ZEUSHLP, utili per vedere e usare i file di help di CARTESIO e ZEUS, possono essere installati mediante la stessa procedura.

Il programma CARTESIO può essere eseguito da dischetto o da disco rigido.

Per l'uso da dischetto:

- Avviare Windows.
- Inserire il dischetto contenente CARTESIO nel drive A: oppure B:
- Dal menu *File* selezionare la voce *Esegui...*
- Nell'apposito riquadro immettere: A:CARTESIO.EXE o B:CARTESIO.EXE
- Selezionare il bottone OK per confermare la scelta.

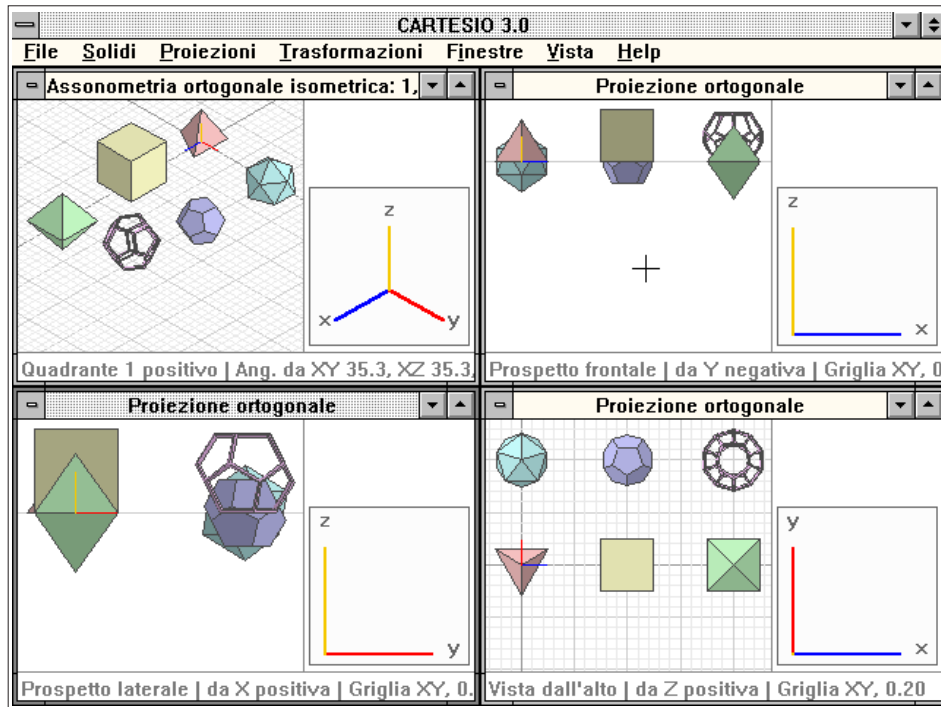


Fig. 1-1 Vista dello schermo alla risoluzione di 640x480 pixel

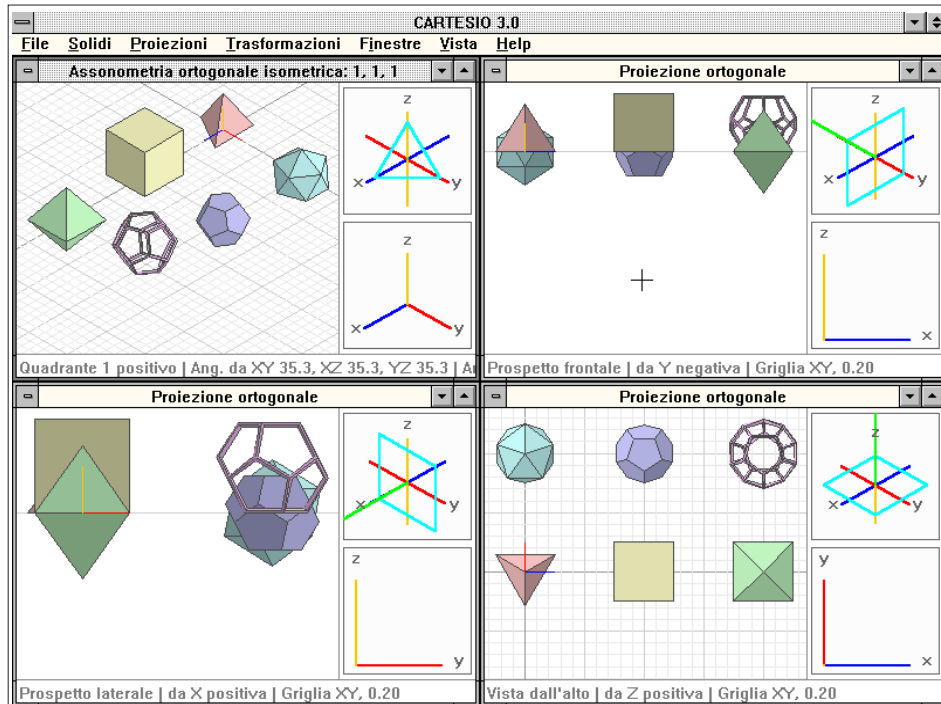


Fig. 1-2 Vista dello schermo alla risoluzione di 800x600 pixel

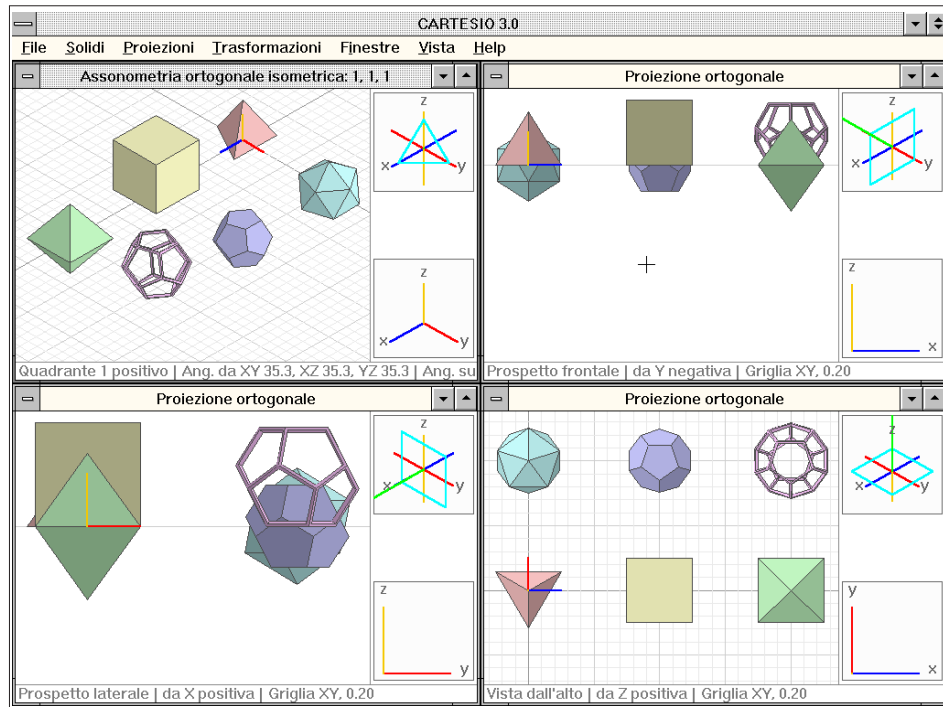


Fig. 1-3 Vista dello schermo alla risoluzione di 1024x768 pixel

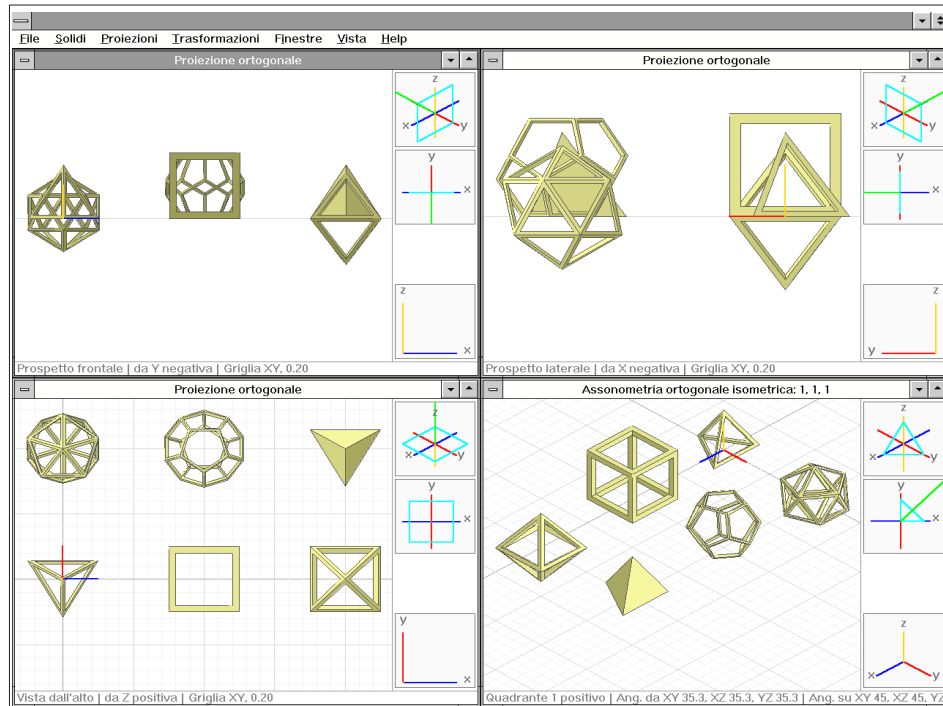


Fig.1-4 Vista dello schermo alla risoluzione di 1280x1024 pixel

L'uso da dischetto, oltre a richiedere più tempo per il caricamento del programma, rallenta l'uso del programma solo quando vengono richiamati i solidi platonici vuoti, il mazzocchio vuoto e l'edificio di esempio, contenuti su file che, in questo caso, dovranno essere letti dal dischetto e non dal disco rigido, molto più veloce nella fase di lettura/scrittura.

Anche l'apertura di alcuni riquadri di dialogo, contenuti nel file *Bwcc.dll*, potrà essere leggermente rallentata ma, complessivamente, i tempi di rappresentazione a video non vengono modificati.

Per l'uso da disco rigido:

- Avviare Windows.
- Avviare l'*utility File Manager* eseguendo un doppio *click* con il tasto sinistro del mouse sulla relativa icona, posta nella cartella Principale.
- Attivare la sequenza *File-Crea directory* e fornire, nell'apposito riquadro, il nome: C:\CARTESIO o, al posto della lettera C, fornire il suffisso del disco all'interno del quale si vuole caricare il programma (ad esempio D:\CARTESIO se è disponibile anche un disco rigido denominato D: e si desidera usarlo per il programma CARTESIO). Viene così creata una directory denominata CARTESIO.
- Attivare, sempre in *File Manager*, la sequenza *File-Copia*, scrivere nel riquadro superiore: A:\ (o B:\ se si sta usando il dischetto B:) e nel riquadro inferiore C:\CARTESIO (o D:\CARTESIO) e premere il bottone OK.
- In tal modo tutti i file contenuti nel dischetto vengono copiati nella directory CARTESIO.
- Uscire dal *File Manager* con la sequenza *File-Esci*.
- Eseguire l'applicazione *Setup di Windows* mediante un doppio *click* sull'icona corrispondente, posta di norma nella cartella Principale.
- Selezionare la voce *Installa applicazioni* dal menu *Opzioni*.
- Selezionare la voce: *Chiederà di specificare un'applicazione*, ed eseguire un *click* sul bottone OK.
- Indicare nella casella superiore: C:\CARTESIO\CARTESIO.EXE.
- Selezionare nella casella inferiore la voce *Applicazioni*.
- Confermare la scelta con il bottone OK.
- Chiudere il riquadro con la sequenza *Opzioni-Esci* o con ALT+F4 oppure anche mediante la voce *Chiudi* del menu attivato premendo il bottone in alto a sinistra sulla finestra.
- Nella cartella *Applicazioni* ora comparirà l'icona del programma CARTESIO.
- Volendo cambiare il nome che compare sotto l'icona (CARTESIO.EXE), si deve modificare la prima riga del riquadro di dialogo proposto dall'attivazione del comando *File-Proprietà*, del menu principale di Windows.

D'ora in poi per attivare il programma CARTESIO sarà sufficiente eseguire un doppio *click* sull'icona del programma.

Windows prevede una nutrita varietà di sfondi per l'interfaccia grafica, modificabili mediante l'*utility Pannello di controllo-Colore*.

È necessario che i colori di sfondo scelti per CARTESIO non siano troppo scuri, come quelli delle seguenti configurazioni predefinite che non garantiscono buoni risultati: invertita LCD scura, per video al plasma, predefinita LCD, senape.

Se si utilizza uno sfondo personalizzato è utile comunque scegliere dei colori di sfondo di tonalità chiara.

La configurazione predefinita consigliata è quella denominata Sahara.

Nel dischetto, oltre ai programmi eseguibili *Cartesio.exe* e *Zeus.exe*, sono contenuti anche vari file, con suffisso .FAC, contenenti le descrizioni di alcuni solidi predefiniti (per CARTESIO) e il file *Bwcc.dll* che contiene dei riquadri di dialogo usati da entrambi i programmi. I file .FAC sono nel formato binario e non modificabili: è pertanto da evitare qualsiasi tentativo di cambiamento di quei file, pena il possibile inceppamento del programma. Nel dischetto sono contenuti anche i file *Cartesio.hlp* e *Zeus.hlp*: sono i file di aiuto usati nel menu Help di CARTESIO e ZEUS. Gli stessi file di aiuto possono anche essere attivati direttamente da Windows mediante i programmi *Carthlp.exe* e *Zeushlp.exe*. Il file *Uso_tast.wri* è scritto nel formato Windows Write e contiene le indicazioni necessarie all'uso della tastiera per modificare le rappresentazioni (Capitolo 4 del manuale). Il file *Leggimi.txt* contiene questo capitolo, dedicato all'installazione del programma.

File presenti nel dischetto:

- CARTESIO	EXE	Eseguibile del programma CARTESIO
- ZEUS	EXE	Eseguibile del programma ZEUS
- CARTHLP	EXE	Programma per usare l'Help di CARTESIO da Windows
- ZEUSHLP	EXE	Programma per usare l'Help di ZEUS da Windows
- BWCC	DLL	Libreria di riquadri di dialogo
- CASA	FAC	Edificio di esempio
- CUBO	FAC	Cubo vuoto
- CUBOTRON	FAC	Cubo tronco
- DODECA	FAC	Dodecaedro vuoto
- DODECAT	FAC	Dodecaedro tronco
- GROMBICO	FAC	Icosidodecaedro tronco
- GROMBICU	FAC	Cubottaedro tronco
- ICOSA	FAC	Icosaedro vuoto
- ICOSIDO	FAC	Icosidodecaedro
- MAZZOCC	FAC	Mazzocchio vuoto
- OTTA	FAC	Ottaedro vuoto
- ROMBICO	FAC	Rombicosidodecaedro
- ROMBICU	FAC	Rombicubottaedro
- SNUBCU	FAC	Cubo simo
- SNUBDOD	FAC	Dodecaedro simo
- TETRA	FAC	Tetraedro vuoto
- CARTESIO	HLP	File di help in linea di CARTESIO
- ZEUS	HLP	File di help in linea di ZEUS
- USO_TAST	WRI	File in formato Write con le indicazioni sull'uso dei tasti
- LEGGIMI	TXT	File contenente le ultime informazioni

Capitolo 2

Fondamenti

2.1 PREMESSA

Il programma CARTESIO ha come utenti naturali gli studenti degli ultimi anni di Liceo Scientifico, del Diploma per Geometri e gli studenti dei primi anni delle Facoltà di Architettura e Ingegneria.

Per quanto concerne le conoscenze, nel campo dell'uso del computer e del sistema operativo Windows, necessarie per esercitarsi con CARTESIO, si è già detto e comunque è senz'altro possibile acquisirle nel volgere di poche ore, fermo restando che potranno rivelarsi utili per l'uso di ogni altro programma Windows.

Le nozioni geometrico-matematiche essenziali per operare con disinvoltura e per usare il programma con intelligenza, sono invece raccolte in questo capitolo.

Tutte le informazioni di seguito riportate non sono dimostrate in questa sede, dato che questo manuale non è, né vuole essere, un trattato di geometria proiettiva o analitica o di computer grafica.

Chi avesse necessità di approfondire ulteriormente i concetti qui espressi, potrà farlo con l'aiuto di un manuale di disegno per le Scuole Medie Superiori o di geometria descrittiva per l'Università, come, ad esempio, le *Applicazioni della geometria descrittiva* di Ugo Saccardi¹.

Gli argomenti proposti nelle sezioni relative alla *computer graphics* sono invece estesamente trattati, ad esempio, in *Computer graphics* di Steven Harrington², in *Computer grafica* di Roy Plastock e Gordon Kalley³ e in modo più approfondito, ma anche più complesso, in *Modelli geometrici* di Michael Mortenson⁴.

¹ Ugo Saccardi, *Applicazioni della geometria descrittiva*, V edizione riveduta e ampliata, Firenze, LEF, 1989, 437 p.

² Steven Harrington, *Computer graphics - Corso di programmazione*, trad. dall'inglese (*Computer graphics - A programming Approach*), Milano, McGraw Hill, 1987, 520 p. (Sezione di Computer Graphics coordinata da Umberto Cugini).

³ Roy A. Plastock - Gordon Kalley, *Computer grafica*, trad. dall'inglese (*Computer Graphics*), Milano, Etas Libri, 1987, 339 p. (collana Schaum - teoria e problemi).

⁴ Michael E. Mortenson, *Modelli geometrici in computer graphics*, trad. dall'inglese (*Geometric Modeling*), Milano, McGraw Hill, 1989, 932 p. (Sezione di Computer Graphics coordinata da Umberto Cugini)

È bene specificare ancora una volta che CARTESIO, e a maggior ragione questo manuale, non sostituiscono affatto lo studio tradizionale, da svolgere sui libri: i metodi di geometria descrittiva, ad esempio, non sono studiati in questa sede, pur restando essenziali per la costruzione manuale di un disegno.

Ciò che qui si vuole sperimentare è la capacità di un programma interattivo, e di uso libero, di proporre argomenti di approfondimento e di contribuire a risolvere i problemi della proiezione di un oggetto su di un piano e, soprattutto, della comprensione spaziale di questa azione.

2.2 NOZIONI DI BASE PER L'USO DI CARTESIO

Trattando di proiezioni, è imperativo che l'utente di CARTESIO conosca anzitutto gli elementi fondativi della geometria euclidea: il punto, la linea, il piano, lo spazio.

È anche necessario possedere nozioni comuni, facenti parte dei programmi delle scuole medie inferiori, come la prima nozione tratta dal primo libro degli *Elementi* di Euclide: “Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche tra loro”, oppure termini quali: “Punto è ciò che non ha parti” (I termine, I libro, *Elementi*), “Linea è lunghezza senza larghezza” (II termine, I libro, *Elementi*), “Estremi di una linea sono punti” (III termine, I libro, *Elementi*) e così via.

Sono indispensabili anche i concetti di parallelismo e perpendicolarità, sia tra rette sia tra piani, o anche conoscenze elementari quali, ad esempio: una retta interseca un piano in un punto, a meno che non siano paralleli o che il piano la contenga.

Ma si rivelerà molto utile anche la conoscenza, sia pur superficiale, della geometria analitica: infatti si è cercato in ogni aspetto del programma di collegare sempre l'entità geometrica “astratta” alla sua rappresentazione sullo schermo ma anche di trovare una corrispondenza analitica, matematica.

I programmi CAD, in realtà, trattano le entità grafiche esclusivamente con mezzi numerici e dunque l'utente accorto e non passivo, per dominare le caratteristiche di un programma di quel tipo, deve necessariamente conoscerne almeno i fondamenti. Per questo alla fine del capitolo si è introdotta una sezione dedicata alle matrici ed ai vettori, che però non potranno essere del tutto assimilati se, ad esempio, non si conosce la forma algebrica di un piano o di una retta. Inoltre, per la rappresentazione, si useranno i solidi o poliedri regolari platonici (anche nelle loro forme vacua, tronca e stellata) e alcuni altri solidi ottenuti per rivoluzione o estrusione di poligoni regolari e pertanto è conveniente darne una breve descrizione geometrica.

I poliedri regolari convessi (noti anche come solidi platonici) sono cinque, tutti formati da facce uguali tra loro, definite da poligoni regolari (triangoli equilateri, quadrati o pentagoni), e formanti nei vertici angoli triedri (definiti da tre piani che si incontrano), tetraedri (formati da quattro piani che si incontrano) o pentaedri (vi si incontrano cinque piani).

In un poliedro regolare gli spigoli sono dunque tutti uguali tra loro, così come anche gli angoli. In particolare (vedi figure da 1 a 5 in Appendice B):

- Il tetraedro regolare è dotato di 4 facce in forma di triangolo equilatero, 6 spigoli e 4 vertici con angoli triedri.
- Il cubo o esaedro regolare ha sei facce quadrate, 12 spigoli e 8 vertici con angoli

triedri trirettangoli (i piani si incontrano perpendicolarmente tra loro).

- L'ottaedro regolare è definito da 8 triangoli equilateri, 12 spigoli e 6 vertici con angoli tetraedri.
- L'icosaedro regolare ha per facce 20 triangoli equilateri, 30 spigoli e 12 vertici con angoli pentaedri.
- Il dodecaedro è formato da 12 pentagoni regolari, 30 spigoli e 20 vertici con angoli triedri.

Facendo passare dei piani, sezionando dunque, i solidi platonici in corrispondenza di alcuni punti topici posti sugli spigoli contigui, si creano altri cinque solidi, chiamati platonici tronchi (vedi figure da 16 a 20 dell'Appendice B) appartenenti al gruppo dei solidi archimedei. I solidi platonici tronchi saranno pertanto formati da facce, sempre regolari, di due tipi diversi: le facce date dai piani di sezione, che avranno un numero di lati pari al numero di spigoli che si incontrano nei vertici; e le facce ottenute a partire dalle facce originali dei solidi platonici, tagliate però dai piani di sezione. Il numero totale delle loro facce è dato dalla somma tra le facce e i vertici originali. Il tetraedro tronco è pertanto definito da 8 facce (4 triangoli + 4 esagoni), il cubo tronco da 14 (8 triangoli + 6 ottagoni), l'ottaedro tronco ancora da 14 facce (6 quadrati + 8 esagoni), l'icosaedro tronco da 32 facce (12 pentagoni + 20 esagoni) ed infine anche il dodecaedro tronco sarà formato da 32 facce ma suddivise in 20 triangoli (il numero dei vertici triedri) e 12 pentagoni (il numero delle facce di un dodecaedro regolare).

Gli altri poliedri archimedei, tutti a vertici congruenti, sono generati dai solidi platonici o l'uno dall'altro per troncatura, variazione dell'area delle facce e rotazione delle facce stesse.

Infine se su ogni faccia di un solido platonico si applica una piramide formata da tanti triangoli equilateri quanti sono i lati della faccia, si generano i solidi platonici stellati. I solidi platonici stellati sono dunque tutti formati solo da triangoli equilateri, il cui numero è dato dal numero di facce del corrispondente solido platonico, moltiplicato per il numero di lati di una faccia: così il tetraedro stellato avrà 12 facce (4×3), il cubo stellato ne avrà 24 (6×4), l'ottaedro stellato ancora 24 (dato però da 8 facce per 3 lati), l'icosaedro stellato avrà 60 facce (20×3) e il dodecaedro stellato di facce ne avrà sempre 60 date da 12 (numero di facce del dodecaedro) moltiplicato 5 (numero dei lati del pentagono).

La conoscenza della forma dei solidi che si useranno nelle prove e dei rapporti esistenti tra di loro, si rivelerà molto utile al momento in cui si dovranno trarre delle conclusioni, sia visive che numeriche, dagli esercizi svolti.

2.3 TERNA DEGLI ASSI CARTESIANI

Una delle basi della geometria analitica è data dal sistema di coordinate, metodo che consente di instaurare un mutuo collegamento tra punti, rette o piani e numeri reali.

Se tre piani si incontrano in un punto ed in modo tale da formare tra loro quattro angoli triedri trirettangoli (siano dunque ortogonali tra loro), essi definiscono anche tre rette, date dalla loro mutua intersezione (vedi figura 2-1).

Fissato, come origine del sistema, il punto di intersezione delle tre rette, definita

l'unità di misura e il verso positivo di ogni retta, sarà possibile far corrispondere ad ogni punto P , appartenente allo spazio, una terna di numeri reali che corrispondono alle tre distanze del punto P dall'origine, calcolate lungo le tre rette orientate, denominate assi (vedi figura 2-2). I tre valori potranno essere positivi o negativi secondo che il punto si trovi lungo il verso positivo o negativo del rispettivo asse.

Per contro, dati tre numeri reali, è sempre possibile trovare la posizione nello spazio di un punto, sempre univocamente determinato.

Il sistema di riferimento cartesiano, usato dal programma CARTESIO ed in generale nella geometria analitica classica, prevede che l'unità di misura sia unica per i tre assi ed assegna convenzionalmente ad essi i nomi X (ascissa), Y (ordinata) e Z (quota). Inoltre, per convenzione, gli assi X ed Y sono orizzontali e l'asse Z verticale e osservando in pianta il sistema cartesiano, con il centro di proiezione posto a coordinata Z positiva e infinita (punto improprio), l'asse X positivo sarà orizzontale e orientato verso destra, mentre l'asse Y positivo sarà verticale e orientato verso l'alto.

La notazione più comune per definire un punto nello spazio è $P(x, y, z)$, ad esempio $P(2.024, -5.469, 9.256)$.

Il sistema di coordinate cartesiane è per definizione inerziale, vale a dire fisso nello spazio e rigidamente connesso alle "stelle fisse". Una volta definito il sistema cartesiano, tutto si lega a questo: oggetti, punti, linee, piani. Questo aspetto distingue in modo netto la geometria analitica dalla geometria descrittiva, nella quale il sistema è relativamente libero e legato soprattutto al foglio da disegno.

2.4 QUADRANTI E PIANI CARTESIANI

Nel sistema cartesiano sono presenti tre piani, detti piani cartesiani, definiti da altrettante coppie di assi: il piano definito dagli assi X e Y (piano XY), quello dato dagli assi X e Z (piano XZ) e quello determinato da Y e Z (piano YZ). Il piano XY è, per convenzione, orizzontale, mentre i piani XZ e YZ sono verticali.

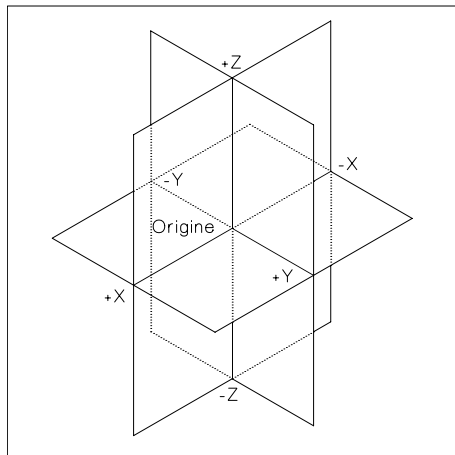


Fig. 2-1 La terna degli assi cartesiani

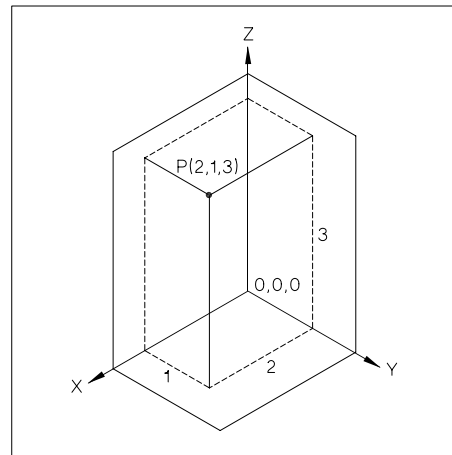


Fig. 2-2 Identificazione di un punto P

L'orizzontalità o verticalità dei piani cartesiani, in CARTESIO, è una caratteristica assoluta, non relativa e legata, ad esempio, al piano di rappresentazione: il piano XY sarà, nella realtà, sempre e comunque orizzontale, mentre entità grafiche poste su quel piano, una volta che siano state proiettate, potranno assumere le più svariate giaciture, dipendenti dalla disposizione del piano di proiezione e del centro di proiezione, come verrà meglio chiarito nelle prossime sezioni.

Il piano XY viene diviso dagli assi X e Y in quattro parti, dette quadranti:

- Il primo quadrante è definito dagli andamenti positivi degli assi X e Y (vedi figura 2-3). Punti appartenenti a quel quadrante avranno perciò coordinate X e Y sempre e solo positive.
- Il secondo quadrante è definito dall'asse X negativo e Y positivo.
- Ad esempio i punti $(-1, 3, 5)$ e $(-0.2, 22, -4)$ appartengono entrambi al secondo quadrante.
- Il terzo quadrante è definito dagli andamenti negativi degli assi X e Y. Ad esempio i punti $(-2, -1, -9)$ e $(-1, -0.3, 12)$ appartengono al terzo quadrante.
- Infine il quarto quadrante è definito dall'asse X positivo e Y negativo. Esempi di punti appartenenti al quarto quadrante sono $(1, -3, 4)$ e $(2, -9, -8)$.

Come si sarà notato i punti appartenenti ad un dato quadrante potranno avere le coordinate Z sia positive che negative: in CARTESIO per differenziare i due casi si parlerà, ad esempio, di primo quadrante positivo o terzo negativo.

2.5 PROIEZIONE E SEZIONE

La proiezione e la sezione sono operazioni fondamentali della geometria proiettiva. Definito un centro di proiezione **O** (spesso denominato anche **PV**), proiettare un punto **A** su di un piano μ (il piano di proiezione o quadro), significa costruire la retta **r** passante per **O** e per **A** e intersecare (sezionare) il piano μ .

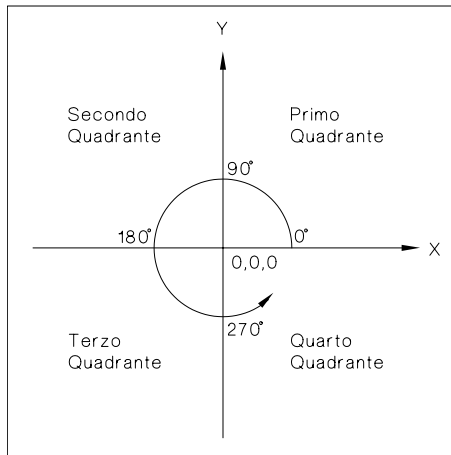


Fig. 2-3 Quadranti

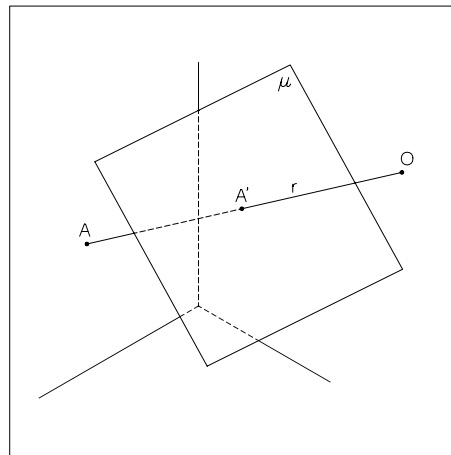


Fig. 2-4 La proiezione di un punto su piano

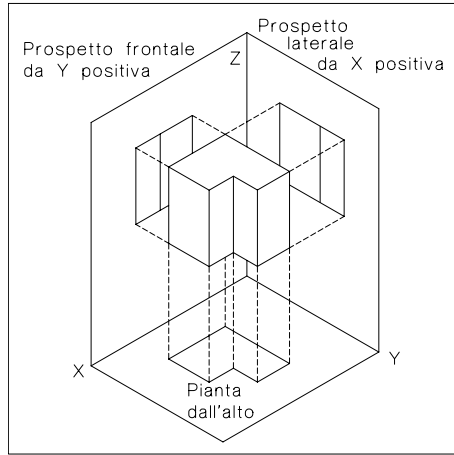


Fig. 2-5 Esempio di proiezioni ortogonali

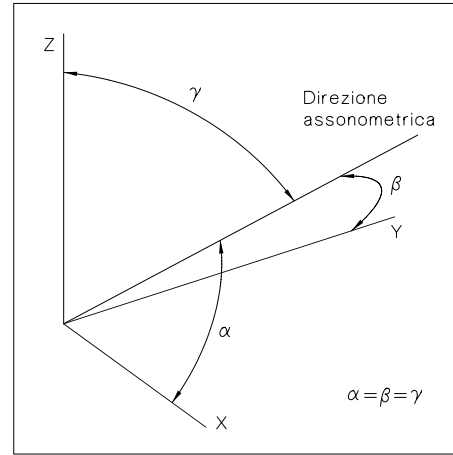


Fig. 2-6 Assonometria ortogonale isometrica

L'intersezione della retta r su μ identifica il punto A^l , che è appunto la proiezione di A su μ (vedi figura 2-4).

Il punto O potrà trovarsi a distanza finita o infinita dal piano di proiezione e dagli oggetti proiettati: nel primo caso la proiezione sarà detta conica o prospettica, nel secondo cilindrica, ad indicare proiezioni ortogonali e assonometriche.

In quest'ultimo caso il punto O è detto punto improprio e indica pertanto la direzione della retta proiettante o direzione di proiezione.

Le proiezioni coniche prendono il loro nome dal fatto che le rette proiettanti, tutte passanti per O , formano un fascio di rette non parallele tra loro, adombrando la configurazione delle rette generatrici di una superficie rigata conica. Viceversa, nelle proiezioni cilindriche le rette proiettanti sono tutte parallele tra loro, come le generatrici di un cilindro, dato che il centro di proiezione è un punto improprio.

In CARTESIO si useranno i seguenti termini:

- Il **punto principale** (O^l oppure anche **PP**) è dato dalla proiezione perpendicolare del centro di proiezione sul quadro. Nel caso di proiezioni cilindriche, dato che esistono infiniti punti che soddisfano la condizione posta, viene assunto come punto principale l'origine degli assi del sistema cartesiano.
- La **distanza principale** è la distanza tra il punto principale e il centro di proiezione, ovvero la distanza del centro di proiezione dal quadro.
- La **direzione di proiezione** è la retta che unisce il centro di proiezione al punto principale, perpendicolarmente al quadro.

È importante notare che tutte le proiezioni su piano, siano esse cilindriche o coniche, sono definite secondo la disposizione del piano di proiezione e del centro di proiezione rispetto agli assi cartesiani, senza nessuna relazione con gli oggetti rappresentati. Infatti per definire univocamente una proiezione è necessario e sufficiente determinare, rispetto agli assi cartesiani, la giacitura del piano di proiezione e, per le proiezioni cilindriche, la direzione di proiezione, oppure, per le proiezioni coniche, la posizione del centro di proiezione, non appartenente al quadro stesso.

Tutte le altre caratteristiche derivano direttamente da quella configurazione, così come

anche la disposizione delle entità grafiche proiettate. La posizione degli oggetti rispetto agli assi è dunque del tutto influente per la collocazione tassonomica (o classificazione) delle proiezioni. Spostando o modificando gli oggetti cambia la rappresentazione (l'immagine), non la configurazione proiettiva.

2.6 PROIEZIONI ORTOGONALI

Le proiezioni ortogonali sono proiezioni cilindriche, vale a dire che il centro di proiezione è un punto improprio. Sono caratterizzate dalla giacitura del piano di proiezione parallela ad uno dei tre piani cartesiani e dalla direzione di proiezione perpendicolare al quadro e dunque parallela ad un asse cartesiano (vedi figura 2-5).

Dato che il sistema di riferimento cartesiano prevede tre assi con sei versi (X positivo, X negativo ecc.), vi sono sei possibili configurazioni di proiezione ortogonale:

- Da Z positiva con proiezione sul piano XY (pianta dall'alto dell'oggetto).
- Da Z negativa con proiezione sul piano XY (pianta dal basso dell'oggetto).
- Da X positiva con proiezione sul piano YZ (prospetto laterale, da destra rispetto all'oggetto).
- Da X negativa con proiezione sul piano YZ (prospetto laterale, da sinistra rispetto all'oggetto).
- Da Y positiva con proiezione sul piano XZ (prospetto frontale, da dietro l'oggetto).
- Da Y negativa con proiezione sul piano XZ (prospetto frontale, da davanti l'oggetto).

In una proiezione ortogonale le lunghezze poste parallelamente al piano di proiezione mantengono le loro estensioni originarie, mentre tutte le lunghezze poste parallelamente al terzo asse (quello parallelo alla direzione di proiezione) vengono ridotte ad un punto, le altre sono scorciate con fattore compreso tra 0 e 1. In ogni proiezione ortogonale sono dunque sempre visibili due dei tre assi (il terzo è ridotto ad un punto) e, sul piano di proiezione, l'angolo tra i due assi visibili è sempre pari a 90 gradi.

2.7 PROIEZIONI ASSONOMETRICHE ORTOGONALI

La configurazione spaziale di una proiezione assonometrica ortogonale è del tutto simile a quella di una proiezione ortogonale, con la differenza che la giacitura del piano di proiezione non è mai parallela ad uno dei tre piani cartesiani. Dato che il quadro è inclinato rispetto agli assi cartesiani, questi verranno proiettati tutti sul piano stesso e non solo due come nel caso delle proiezioni ortogonali. Segmenti posti parallelamente agli assi cartesiani saranno sempre proiettati in segmenti più corti dei segmenti reali: i fattori di scorciamento sono pertanto sempre minori di 1. Inoltre gli assi proiettati sul piano formeranno tra loro angoli che non sono mai di 90 gradi: infatti la loro somma deve dare un angolo giro pari a 360 gradi.

Si tratta di una proiezione cilindrica con direzione di proiezione perpendicolare al

piano di proiezione (da qui il nome ortogonale) che prevede tre tipi distinti:

- **Proiezione assonometrica ortogonale isometrica**, quando il piano di proiezione forma con i tre piani cartesiani tre angoli uguali tra loro. In questo caso lunghezze uguali poste parallelamente ai tre assi cartesiani saranno proiettate sul quadro con scorciamenti uguali tra loro (vedi figura 2-6). Gli angoli che i tre assi proiettati formano tra loro sul quadro sono tutti uguali e pari a 120 gradi. Vi sono otto possibili configurazioni proiettive: due per ogni quadrante, una per il verso positivo delle Z ed una per quello negativo.

- **Proiezione assonometrica ortogonale dimetrica**. In questo caso il piano di proiezione forma con i piani cartesiani due angoli uguali tra loro ed un terzo diverso dagli altri due. Gli scorciamenti di lunghezze uguali poste lungo gli assi saranno dunque uguali tra loro solo per due assi (vedi figura 2-7). Anche gli angoli che formano tra loro sul quadro gli assi proiettati saranno pertanto due uguali tra loro ed il terzo diverso dai primi due. Esistono infinite configurazioni possibili di questo tipo di assonometria, ma solo alcune sono state codificate.

In CARTESIO sono presenti, oltre alla definizione di una proiezione dimetrica generica, le seguenti configurazioni predefinite:

- Rapporti tra gli assi 1, 1, 0.5: le lunghezze lungo due assi sono doppie rispetto al terzo asse. I valori 1 e 0.5 non devono trarre in inganno: non significano infatti che un segmento di lunghezza unitaria posto lungo un asse non viene scorciato (in realtà la lunghezza proiettata è 0.943 unità), ma che la lunghezza è doppia rispetto a quella di un identico segmento posto lungo il terzo asse (0.4715). In altre parole la lunghezza scorciata del segmento proiettato viene moltiplicata per un fattore che la porta al valore unitario e lo stesso fattore moltiplica anche gli altri segmenti scorciati. Gli angoli, sul quadro, tra gli assi proiettati sono pari a 131.4°, 131.4° e 97.2°.
- Angoli tra gli assi proiettati di 130°, 130°, 100°. Le lunghezze di tre segmenti unitari posti lungo gli assi sono pari, sul quadro, a 0.923, 0.923, 0.544 unità.
- Rapporti tra gli assi 1, 1, 0.66667 (valori reali 0.905, 0.905, 0.603). Gli angoli, sul quadro, tra gli assi proiettati sono pari a 128.6°, 128.6°, 102.8°.
- Rapporti tra gli assi 1, 1, 0.75 (valori reali 0.883, 0.883, 0.663). Gli angoli, sul quadro, tra gli assi proiettati sono pari a 126.8°, 126.8°, 106.4°.
- Rapporti tra gli assi 1, 0.75, 0.75 (valori reali 0.97, 0.728, 0.728). Gli angoli, sul quadro, tra gli assi proiettati sono pari a 152.6°, 103.7°, 103.7°.

- **Proiezione assonometrica ortogonale trimetrica**. Nelle assonometrie ortogonali trimetriche il quadro forma con i tre piani cartesiani tre angoli diversi tra loro e dunque anche le lunghezze dei tre segmenti unitari posti lungo gli assi saranno, proiettate sul quadro, diverse tra loro e differenti saranno anche gli angoli tra gli assi proiettati, misurati sul piano di proiezione.

In CARTESIO, oltre alla configurazione generica, sono previste alcune configurazioni predefinite (gli angoli sono sempre espressi nella forma decimale):

- Angoli tra gli assi proiettati 130°, 120°, 110°. Rapporti tra gli assi 1, 0.936, 0.814 (valori reali 0.889, 0.718, 0.833).
- Angoli tra gli assi proiettati 100°, 120°, 140°. Rapporti tra gli assi 1, 0.938, 0.589 (valori reali 0.948, 0.889, 0.559).

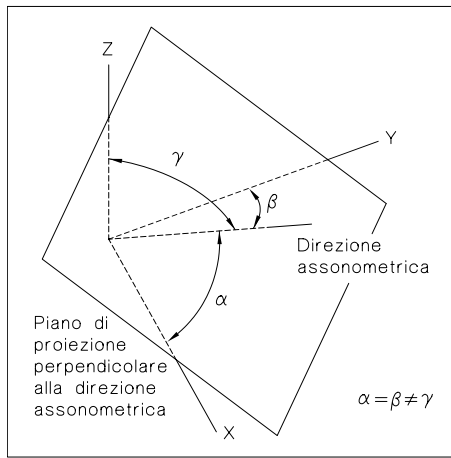


Fig. 2-7 Assonometria ortogonale dimetrica

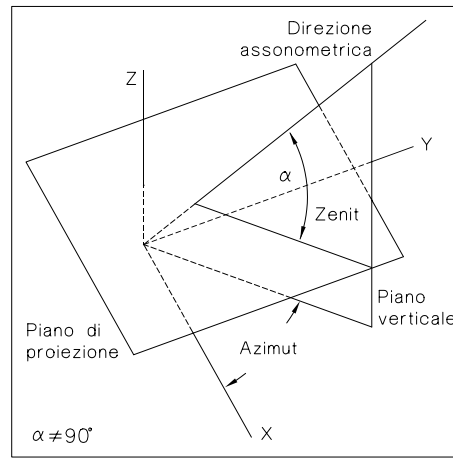


Fig. 2-8 Assonometria obliqua

- Rapporti tra gli assi 1, 0.6666, 0.75 (valori reali 0.998, 0.6665, 0.749).
Angoli tra gli assi proiettati (calcolati sul quadro) pari a 93.8°, 93°, 173.2°.
- Rapporti tra gli assi 1, 0.7, 0.85 (valori reali 0.951, 0.666, 0.808).
Angoli tra gli assi proiettati 111.4°, 103.8°, 144.8°.
- Rapporti tra gli assi 1, 0.8, 0.9 (valori reali 0.904, 0.723, 0.813).
Angoli tra gli assi proiettati 117°, 109.8°, 133.2°.

2.8 PROIEZIONI ASSONOMETRICHE OBLIQUE

Per proiezione assonometrica obliqua si intende una proiezione cilindrica nella quale la direzione di proiezione è obliqua (non ortogonale) rispetto al quadro. Delle infinite configurazioni vengono prese però in considerazione solo quelle che presentano il piano di proiezione parallelo ad uno dei tre piani cartesiani (vedi figura 2-8). In tal modo, pur restando visibili nella proiezione tutti e tre gli assi, due di essi formeranno tra loro, sul quadro, un angolo di 90 gradi. Pertanto in una assonometria obliqua tutti i segmenti paralleli al piano cartesiano parallelo al quadro non saranno scorciati nella proiezione. Ad esempio, se il quadro è orizzontale, la pianta degli oggetti rappresentati sarà del tutto congruente, nella proiezione, alla pianta ottenuta per mezzo di una proiezione ortogonale.

Le proiezioni assonometriche oblique canoniche si suddividono in due classi, militare e cavaliera, e ciascuna di queste in due tipi: monometrica e dimetrica.

L'**assonometria obliqua militare** prevede la giacitura orizzontale del piano di proiezione, mentre l'**assonometria obliqua cavaliera** è caratterizzata dal piano di proiezione verticale. Nelle assonometrie oblique **monometriche** l'asse cartesiano recedente (quello perpendicolare al quadro) non viene scorciato, mentre nelle oblique **dimetriche**, segmenti posti lungo l'asse recedente subiscono una riduzione o un allungamento. Il fattore di scorciamento (o di allungamento) può dunque variare tra 0 e 1 e tra 1 e +infinito, secondo che l'angolo tra la direzione assonometrica e il

quadro sia maggiore o minore di 45 gradi (vedi figura 2-9). Quando l'angolo è pari a 45 gradi il fattore è unitario e pertanto la proiezione sarà di tipo monometrico.

Per inciso è da osservare che in CARTESIO gli angoli sono sempre espressi in forma totalmente decimale (100.25° indicherà dunque 100 gradi più un quarto di grado).

In CARTESIO è consentito definire una qualsiasi configurazione, sia monometrica che dimetrica, e sono previste alcune configurazioni predefinite:

- Con angoli tra gli assi proiettati di 90°, 105°, 165°.
- Con angoli tra gli assi proiettati di 90°, 120°, 150°.
- Con angoli tra gli assi proiettati di 90°, 135°, 135°.
- Con angoli tra gli assi proiettati di 90°, 150°, 120°.
- Con angoli tra gli assi proiettati di 90°, 165°, 105°.

Tutte le configurazioni predefinite valgono sia per le monometriche che per le dimetriche e possono variare il piano di proiezione per passare dal tipo militare a cavaliera, nonché l'asse recedente. Non sono accettate proiezioni assonometriche oblique trimetriche in quanto questa configurazione prevede necessariamente che il quadro sia inclinato rispetto ai piani cartesiani. Questa eventualità farebbe perdere una delle caratteristiche più interessanti di queste proiezioni: il mantenimento della pianta o del prospetto di un oggetto. Volendo però simulare gli effetti di una proiezione assonometrica obliqua trimetrica, è possibile ricorrere ad una configurazione prospettica con distanza molto grande (vedi paragrafo seguente).

2.9 PROIEZIONI PROSPETTICHE

Le prospettive sono proiezioni coniche: il centro di proiezione si trova dunque a distanza finita dal quadro. Ciò comporta che segmenti uguali e paralleli tra loro non necessariamente sono proiettati uguali tra loro, ma anzi di norma saranno proiettati con lunghezze una diversa dall'altra. Nelle prospettive, inoltre, linee che nella realtà sono parallele tra loro (ma non parallele al quadro) sono proiettate in modo che sul quadro concorrono tutte ad un unico punto. Pertanto, dato che nello spazio esistono infiniti fasci di rette parallele, una prospettiva può contenere infiniti punti di concorso o di "fuga".

Come per le altre proiezioni, una prospettiva è completamente determinata quando si definisce la giacitura del quadro e la posizione del centro di proiezione, esterno al quadro stesso (vedi figura 2-10). La traslazione del quadro, purché il centro di proiezione non giaccia sul quadro, modifica solo la scala dell'immagine, ma non i rapporti tra le varie parti. Lo spostamento del centro di proiezione, al contrario, modifica l'immagine.

Per le prospettive si definiscono, oltre agli elementi già definiti nella sezione 2.5, anche:

- **L'orizzonte**, dato dalla retta che contiene gli infiniti punti di concorso delle rette orizzontali.
- **Il cerchio delle distanze**, luogo dei punti di concorso di tutte le rette poste a 45 gradi rispetto al quadro.

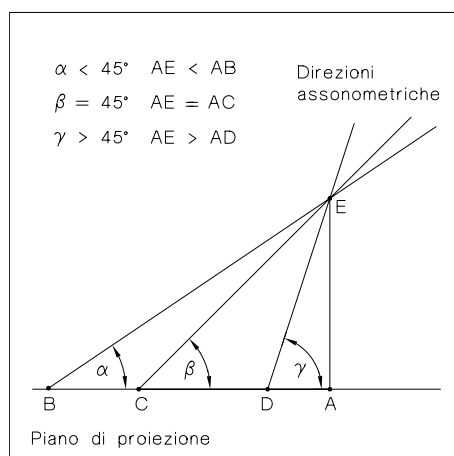


Fig. 2-9 Riduzioni di segmenti ortogonali al quadro

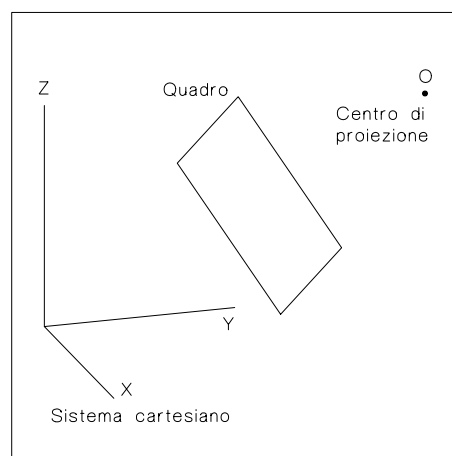


Fig. 2-10 Elementi di una proiezione conica

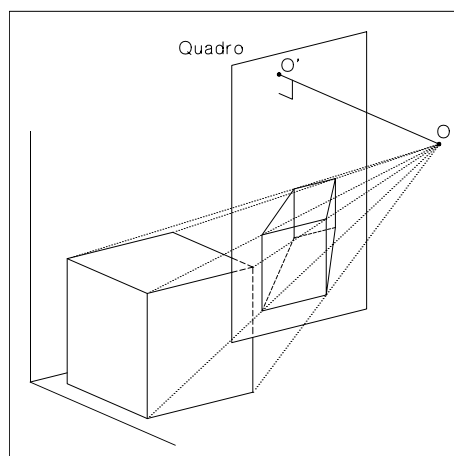


Fig. 2-11 Prospettiva a quadro frontale

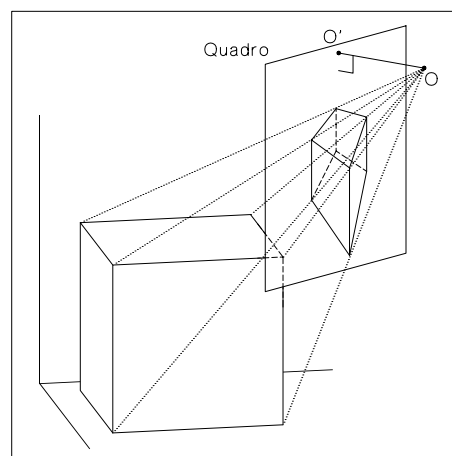


Fig. 2-12 Prospettiva a quadro obliquo

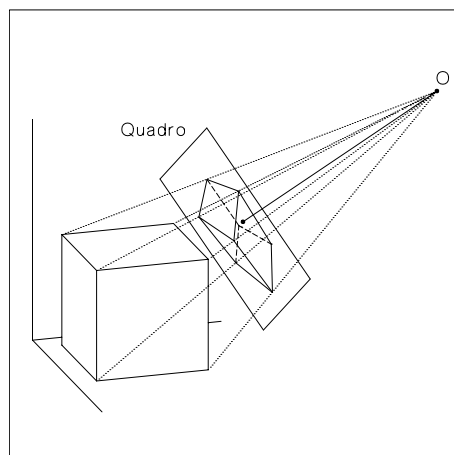


Fig. 2-13 Prospettiva a quadro inclinato

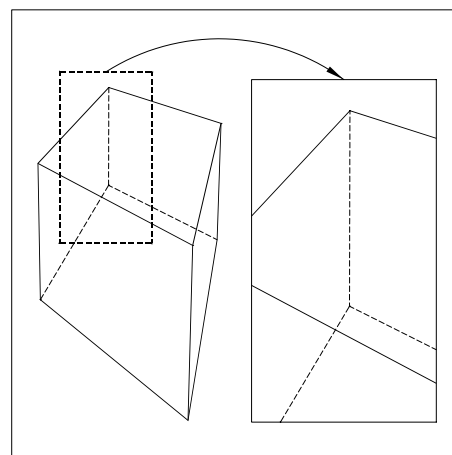


Fig. 2-14 Funzione Zoom

Per comodità e chiarezza le prospettive si dividono in tre tipi:

- A **quadro frontale**, quando il quadro è posto parallelamente ad uno dei piani cartesiani (vedi figura 2-11). In questo caso la retta direzione è sempre parallela ad uno degli assi e i due altri assi vengono proiettati sul quadro mantenendo l'angolo di 90 gradi. Inoltre, se il quadro è verticale, l'orizzonte contiene sempre il punto principale, dato che la retta direzione è orizzontale.

- A **quadro obliquo**, quando il quadro è parallelo ad un asse e obliquo rispetto agli altri due (vedi figura 2-12). La retta direzione è pertanto sempre perpendicolare ad un asse e, se il quadro è verticale, anche in questo caso l'orizzonte contiene sempre il punto principale. Se il quadro è verticale i segmenti reali verticali manterranno la loro giacitura nella proiezione, mentre i segmenti orizzontali e paralleli ai due assi recedenti non saranno mai orizzontali (potrebbero esserlo solo se il quadro fosse parallelo ad un asse ma in quel caso si ricadrebbe nel tipo a quadro frontale).

- A **quadro inclinato**, se il quadro è posto in modo generico rispetto agli assi, non essendo né parallelo, né perpendicolare ad alcuno (vedi figura 2-13). Il quadro non potrà dunque essere mai orizzontale o verticale e pertanto l'orizzonte non conterrà mai il punto principale, visto che la direzione principale non potrà mai essere orizzontale.

2.10 FINESTRA DI VISTA: WINDOW E VIEWPORT

CARTESIO è un programma grafico che possiede molte caratteristiche affini ai programmi CAD. Una tra le più interessanti peculiarità del CAD tridimensionale è data dal fatto che gli oggetti non vengono disegnati su carta, in una certa proiezione e a una determinata scala, ma viene costruito un modello tridimensionale "virtuale" (che però d'ora in avanti ci ostineremo a chiamare reale), e di quel modello vengono

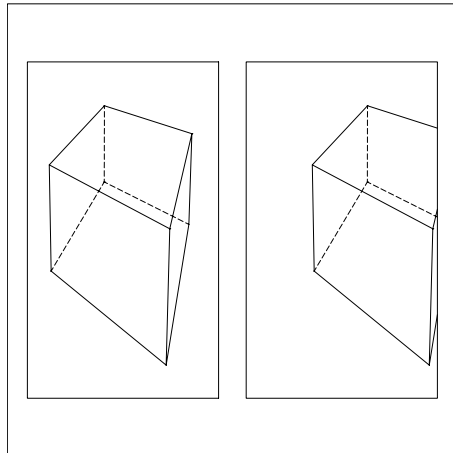


Fig. 2-15 Funzione Pan

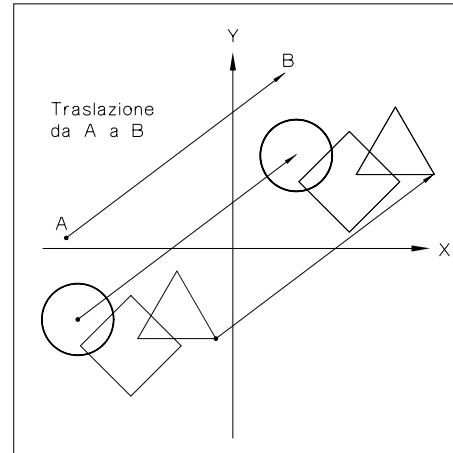


Fig. 2-16 Traslazione

successivamente eseguite le più varie proiezioni alla scala voluta.

Dunque il modello è completamente svincolato sia dalla rappresentazione sia dalla scala: tanto che viene costruito di norma alla scala 1:1.

La rappresentazione del modello su di una finestra Windows è pertanto legata più alle dimensioni della finestra e del monitor che ad una certa scala di rappresentazione. Inoltre all'interno della finestra Windows viene rappresentata solo una parte del piano di proiezione, di per sé infinito. Questi concetti, che in parte e per certi versi sono presenti anche nel disegno tradizionale, nel CAD assumono un'evidenza conclamata, tanto che si sono definite due parole per caratterizzarli e distinguerli: *window* e *viewport*.

La *window* (finestra in inglese) non è altro che la finestra vinciiana attraverso la quale si vedono gli oggetti reali. È dunque la porzione rettangolare di piano di proiezione che si vuole rappresentare sul video. L'entità della grandezza fisica del grafico è invece data dalla *viewport*, che in *computer graphics* viene spesso misurata in pixel (punti luminosi sullo schermo). Quando si ingrandisce la finestra Windows si modifica la *viewport*, mentre quando si esegue lo *zoom* di una parte della finestra si modifica la *window*, lasciando invariata la *viewport* (vedi figura 2-14).

La funzione *pan* sposta, senza modificarne le dimensioni, la *window* sul piano di proiezione (vedi figura 2-15), mentre quando con il mouse si sposta sullo schermo grafico una finestra è la *viewport* ad essere traslata. È molto importante avere ben chiari questi principi poiché sono i soli che consentano di mantenere un corretto collegamento concettuale tra modello e rappresentazione.

2.11 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Ogni entità grafica, nella geometria analitica, è definita da un insieme di punti posti nello spazio, individuati a loro volta da triplete di numeri reali. Le coordinate dei punti possono essere sottoposte a variazioni e modifiche che prendono il nome di

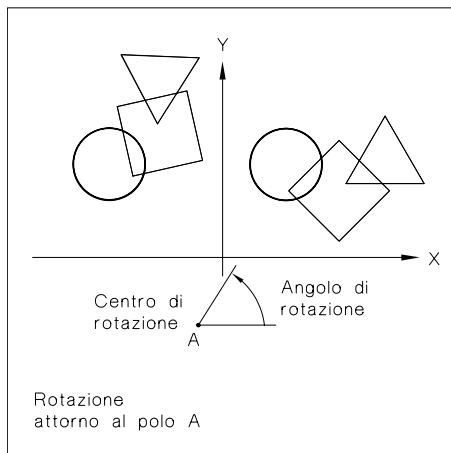


Fig. 2-17 Rotazione

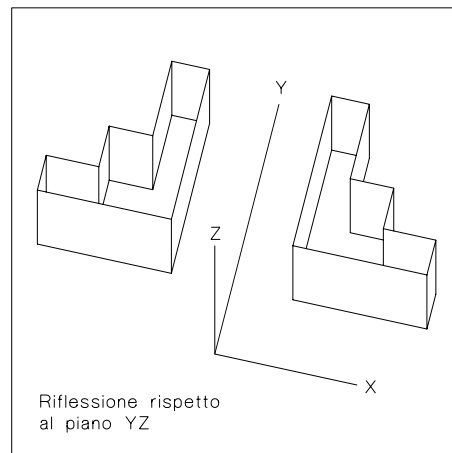


Fig. 2-18 Riflessione

trasformazioni geometriche. Esistono quattro tipi di trasformazioni geometriche:

- La **traslazione**, è data dal movimento lineare, parallelo e concorde di tutti i punti sottoposti a trasformazione (vedi figura 2-16).

La formula algebrica della traslazione è:

$$X^T = X + T_x \quad Y^T = Y + T_y \quad Z^T = Z + T_z$$

dove X^T , Y^T , Z^T rappresentano le coordinate X , Y e Z trasformate e T_x , T_y , T_z i valori di traslazione.

Così due punti $P1(0, 0, 0)$ e $P2(1, 2, 3)$ sottoposti ad una traslazione $T[1.5, -2.5, 3.5]$ modificheranno le loro coordinate in $P1^T(1.5, -2.5, 3.5)$ e $P2^T(2.5, -0.5, 6.5)$.

- La **rotazione**, ruota i punti attorno ad un polo o centro di rotazione (confronta figura 2-17), secondo le seguenti formule trigonometriche:

Per rotazione sul piano XY attorno all'asse Z e come polo l'origine degli assi:

$$X^{Rz} = X \cos \beta - Y \sin \beta \quad Y^{Rz} = X \sin \beta + Y \cos \beta \quad Z^{Rz} = Z$$

dove X^{Rz} , Y^{Rz} , Z^{Rz} rappresentano le coordinate X , Y e Z ruotate di un angolo β .

Per rotazione sul piano XZ attorno all'asse Y e come polo l'origine degli assi

$$X^{Ry} = X \cos \beta + Z \sin \beta \quad Y^{Ry} = Y \quad Z^{Ry} = -X \sin \beta + Z \cos \beta$$

Per rotazione sul piano YZ attorno all'asse X e come polo l'origine degli assi

$$X^{Rx} = X \quad Y^{Rx} = Y \cos \beta - Z \sin \beta \quad Z^{Rx} = Y \sin \beta + Z \cos \beta$$

Le formule sono valide per la regola della mano destra che prevede, per identificare

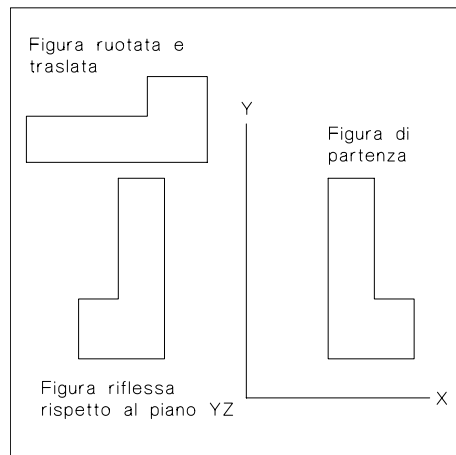


Fig. 2-19 Confronto riflessione e roto-traslazione

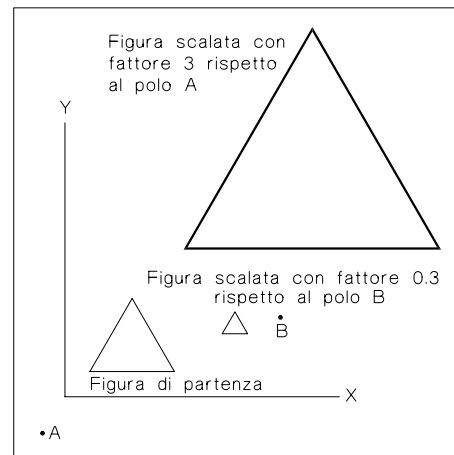


Fig. 2-20 Scalatura (Omotetia)

il verso di rotazione, di usare la mano destra chiusa a pugno ma con il pollice esteso: la direzione del pollice indica il verso positivo dell'asse attorno al quale ruotano i punti mentre le dita chiuse a pugno indicano il verso positivo di rotazione. Così, ad esempio, il punto $P(1, 0, 0)$ ruotato di 90 gradi attorno all'asse Z sul piano XY avrà coordinate $P^{Rz}(0, 1, 0)$; mentre se la rotazione è di -90 gradi le coordinate saranno $P^{Rz}(0, -1, 0)$. Ancora, il punto $P(1, 0, 0)$ ruotato di 90 gradi attorno all'asse Y sul piano XZ diverrà $P^{Ry}(0, 0, -1)$ mentre le sue coordinate rimarranno tali se sarà ruotato attorno all'asse X . Infine il punto $P(0, 1, 0)$ se ruotato di 90 gradi attorno all'asse X sul piano YZ modificherà le sue coordinate in $P^{Rx}(0, 0, 1)$.

- La **riflessione speculare** o **specchiatura**, trasforma un punto nel suo simmetrico rispetto ad un piano (vedi figura 2-18).

Ad esempio il punto $P(1, 1, 1)$ riflesso rispetto al piano XY diviene $P^{Sxy}(1, 1, -1)$, mentre specchiato rispetto a XZ le sue coordinate saranno $P^{Sxz}(1, -1, 1)$ e rispetto a YZ il nuovo punto sarà $P^{Syz}(-1, 1, 1)$.

Se la forma dell'oggetto da trasformare è perfettamente simmetrica (ad esempio un cerchio o un quadrato, una sfera o un cubo), la traslazione consente di ottenere gli stessi effetti della riflessione speculare: se però l'oggetto non è simmetrico la riflessione è l'unica trasformazione in grado di generare certe configurazioni, come è illustrato nella figura 2-19.

- La **scala** o **scalatura**, moltiplica le coordinate di un punto per un coefficiente diverso da zero: se questo è maggiore di 1 la trasformazione aumenta le dimensioni assolute dell'entità grafica, se minore di 1 le diminuisce (vedi figura 2-20). La scala può usare un unico fattore per le tre coordinate (**scala omogenea**) o tre fattori: uno per ogni asse o coordinata (**scala non omogenea**).

Per trasformazione di scala omogenea:

$$X^S = X S \quad Y^S = Y S \quad Z^S = Z S$$

dove S è il fattore di scala comune per i tre assi.

Per trasformazione di scala non omogenea:

$$X^{Sx} = X S_x \quad Y^{Sy} = Y S_y \quad Z^{Sz} = Z S_z$$

dove S_x , S_y ed S_z sono i tre fattori di scala, validi uno per ogni asse.

Nel primo caso il punto $P(1, 1, 1)$, sottoposto ad una trasformazione di scala omogenea con fattore 2, diventerà $P^S(2, 2, 2)$; mentre se i fattori di scala fossero $S[1, 2, 3]$, allora il punto si trasformerebbe in $P^{Sxyz}(1, 2, 3)$.

I fattori di scala devono essere sempre maggiori di zero: un valore zero, infatti, annullerebbe tutte le coordinate, mentre un valore negativo corrisponderebbe, oltre che ad una scala, anche ad una riflessione rispetto ad un piano cartesiano. Inoltre la trasformazione di scala, sia omogenea che non omogenea, prende sempre l'origine degli assi come riferimento. Spesso sarà dunque utile far precedere alla scala una traslazione, per portare ad esempio il baricentro della figura da scalare in corrispondenza dell'origine, scalare la figura e successivamente contro-traslarla, usando gli stessi valori con segno opposto.

Le trasformazioni possono essere combinate tra loro per formare una catena di trasformazioni, per la quale non sempre vale la proprietà commutativa: ad esempio se il punto $P(1, 0, 0)$ viene prima ruotato di 90 gradi attorno all'asse Z e poi traslato di $T[-1, -1, 0]$, le sue coordinate finali saranno $P^1(-1, 0, 0)$; mentre se viene prima traslato e poi ruotato il punto sarà $P^2(1, 0, 0)$, come è mostrato nella figura 2-21.

2.12 VETTORI E MATRICI DI TRASFORMAZIONE

Come è già stato detto più volte i programmi CAD, e in genere i programmi di grafica al computer come CARTESIO, riducono tutti i problemi geometrici in problemi analitici: la proiezione di un punto su un piano viene, ad esempio, ricondotta all'intersezione di una retta con un piano, mentre la sezione di un solido si risolve con il trovare le intersezioni tra ogni sua faccia e il piano di sezione.

Anche le trasformazioni geometriche viste nella sezione precedente trovano un legame con la matematica; legame dato dai *vettori* e dalle *matrici*. Di seguito si daranno alcune definizioni sulle proprietà degli uni e delle altre: nessuna di queste è strettamente necessaria per l'uso di CARTESIO ma potrà servire da inquadramento per chi volesse approfondire gli argomenti proposti.

Un vettore è un segmento orientato, dotato di una determinata lunghezza, detta *modulo*. Per i vettori valgono le regole:

- Due segmenti di modulo uguale e paralleli tra loro rappresentano lo stesso vettore (vedi figura 2-22).
- Detto V un vettore, $-V$ è un vettore di uguale modulo, parallelo al primo ma orientato in direzione opposta.
- Due o più vettori si possono sommare, con il metodo del parallelogramma o del "testa-coda", per generare un vettore somma. Questa operazione è denominata somma vettoriale (vedi figure 2-23 e 2-24).

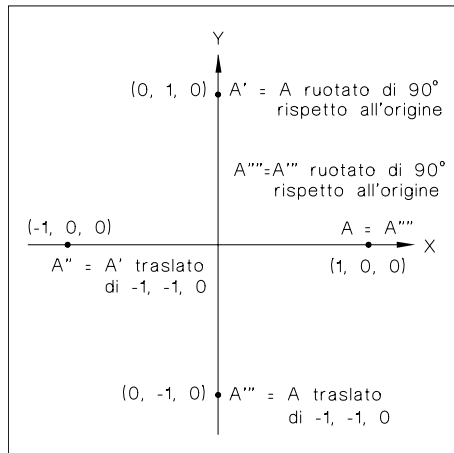


Fig. 2-21 Non commutatività di trasformazioni

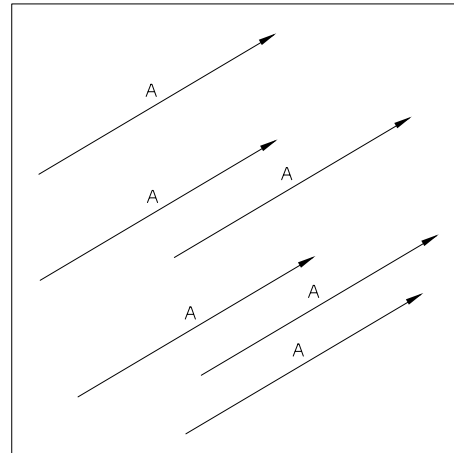


Fig. 2-22 Vettori uguali in modulo e direzione

- Dato il vettore $\mathbf{V}$, $n\mathbf{V}$ è un vettore parallelo a $\mathbf{V}$, di modulo n volte $\mathbf{V}$ e di direzione uguale o opposta a $\mathbf{V}$, secondo il segno di n .
- Un vettore di modulo unitario, orientato nel senso positivo di un asse è chiamato *versore* (vedi figura 2-25).
- Un vettore $\mathbf{V}$ può essere ridotto alle sue componenti: $\mathbf{V} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J} + c\mathbf{K}$ dove $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ sono i tre versori lungo gli assi X, Y e Z, mentre a , b , c rappresentano le tre componenti del vettore $\mathbf{V}$ ed altro non sono che le coordinate cartesiane della testa del vettore stesso, quando la coda è posta sull'origine (vedi figura 2-26).
- Dati due vettori $\mathbf{V1} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J} + c\mathbf{K}$ e $\mathbf{V2} = d\mathbf{I} + e\mathbf{J} + f\mathbf{K}$, si definisce come prodotto scalare tra i due vettori la formula $\mathbf{V1} \cdot \mathbf{V2} = |\mathbf{V1}| |\mathbf{V2}| \cos \beta$ dove $|\mathbf{V1}|$ e $|\mathbf{V2}|$ rappresentano i moduli dei vettori e β è l'angolo compreso tra $\mathbf{V1}$ e $\mathbf{V2}$.

Da ciò segue che se il prodotto scalare tra due vettori è zero, i due vettori sono tra loro perpendicolari ($\cos 90^\circ = 0$); mentre sono paralleli tra loro se sono multipli scalari uno dell'altro ($\cos 0^\circ = 1$).

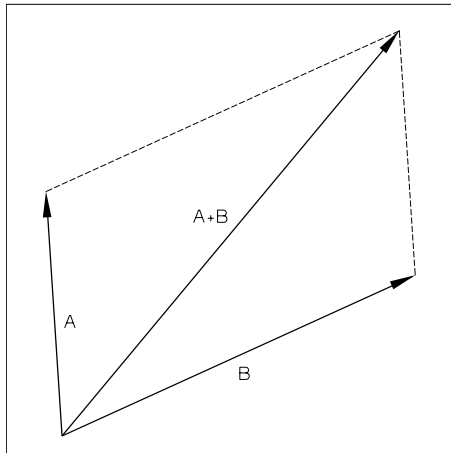


Fig. 2-23 Somma con metodo parallelogramma

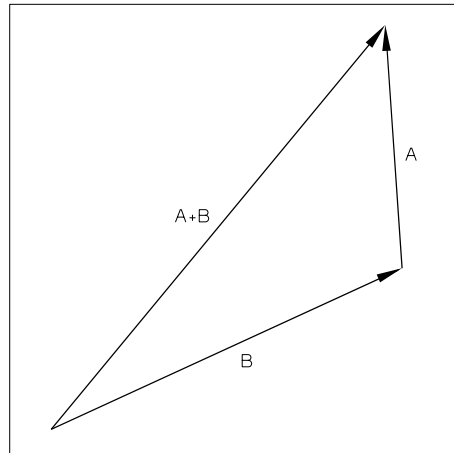


Fig. 2-24 Somma con metodo testa-coda

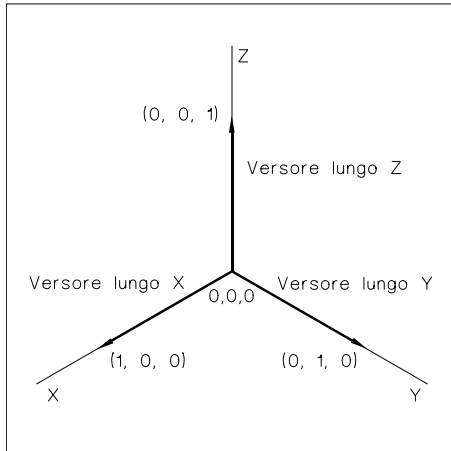


Fig. 2-25 Versori lungo gli assi

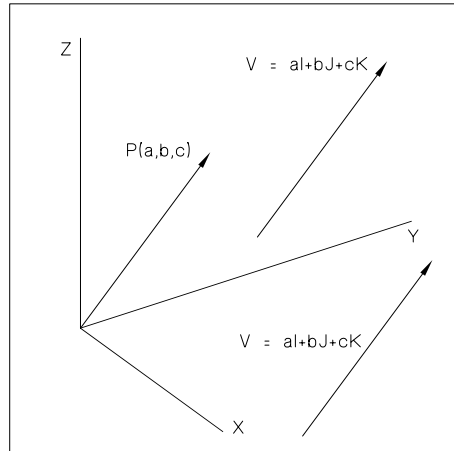


Fig. 2-26 Componenti di un vettore

Il prodotto scalare è un numero puro, indipendente dall'ordine di moltiplicazione: $\mathbf{V1} \cdot \mathbf{V2}$ è pertanto equivalente a $\mathbf{V2} \cdot \mathbf{V1}$.

Altre notazioni del prodotto scalare: $(\mathbf{V1}, \mathbf{V2})$ o anche $\langle \mathbf{V1}, \mathbf{V2} \rangle$.

- Dati i due stessi vettori della definizione precedente, il loro prodotto vettoriale definisce un nuovo vettore, perpendicolare ai due vettori dati: $\mathbf{V1} \wedge \mathbf{V2} = |\mathbf{V1}| |\mathbf{V2}| \sin \beta$. Per la determinazione del verso del vettore perpendicolare vale la regola della mano destra.

In questo caso è dunque importante l'ordine di moltiplicazione dei due vettori:

$$\mathbf{V1} \wedge \mathbf{V2} = - (\mathbf{V2} \wedge \mathbf{V1}).$$

Una matrice è invece identificata da una tabella rettangolare di elementi, disposti per righe e per colonne. In questa sede ci si occuperà solo di matrici quadrate: vale a dire con un uguale numero di righe e di colonne.

Una matrice 4x4 (con quattro righe e quattro colonne) si scriverà dunque:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_{1,3} & \mathbf{a}_{1,4} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} & \mathbf{a}_{2,3} & \mathbf{a}_{2,4} \\ \mathbf{a}_{3,1} & \mathbf{a}_{3,2} & \mathbf{a}_{3,3} & \mathbf{a}_{3,4} \\ \mathbf{a}_{4,1} & \mathbf{a}_{4,2} & \mathbf{a}_{4,3} & \mathbf{a}_{4,4} \end{vmatrix}$$

Per la matrice valgono le seguenti definizioni e proprietà:

- La dimensione di una matrice quadrata è data dal suo numero di righe e di colonne: per la matrice $\mathbf{A}$ la dimensione è 4.

- La diagonale principale di una matrice quadrata è data dall'insieme di elementi con indici uguali: $\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,2}, \mathbf{a}_{3,3}, \mathbf{a}_{4,4}$.

- Si definisce come prodotto scalare $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{B}$ ottenuta moltiplicando ogni elemento di $\mathbf{A}$ per k .

- Si definisce come prodotto matriciale tra due matrici quadrate $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ di ordine uguale, la matrice $\mathbf{AB}$, sempre dello stesso ordine di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, ottenuta in modo tale che ogni elemento di $\mathbf{AB}$ sia dato, per una matrice di ordine 4, da:

$$\mathbf{ab}_{i,j} = \mathbf{a}_{i,1} \mathbf{b}_{1,j} + \mathbf{a}_{i,2} \mathbf{b}_{2,j} + \mathbf{a}_{i,3} \mathbf{b}_{3,j} + \mathbf{a}_{i,4} \mathbf{b}_{4,j}$$

Di norma questa operazione non è commutativa: $\mathbf{AB}$ diverso da $\mathbf{BA}$.

Questa caratteristica si rivelerà importante nelle trasformazioni geometriche e proiettive, dove si userà l'operazione di moltiplicazione matriciale.

- La matrice "identità" $\mathbf{I}$ è una matrice dove tutti gli elementi sono uguali a zero, eccettuati gli elementi della diagonale principale che sono posti tutti uguali a 1.

Moltiplicando una qualsiasi matrice $\mathbf{A}$ per la matrice identità si ottiene ancora $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}.$$

- Per trasposta della matrice $\mathbf{A}$ si intende la matrice $\mathbf{A}^T$ ottenuta scambiando le righe e le colonne di $\mathbf{A}$.

Per le matrici trasposte valgono le proprietà: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ e $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

- Per inversa della matrice $\mathbf{A}$ si intende la matrice $\mathbf{A}^{-1}$, tale da soddisfare l'operazione: $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ (matrice identità).

Non tutte le matrici risultano invertibili: condizione necessaria perché una matrice sia invertibile è che il suo determinante sia diverso da zero.

Un sotto-insieme di matrici quasi certamente invertibili è dato dalle matrici con gli elementi della diagonale principale diversi da 0.

Per le matrici inverse vale la proprietà: $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$.

- La moltiplicazione di un vettore per una matrice (purché abbiano lo stesso ordine e la matrice sia quadrata), genera un secondo vettore, avente per elementi le coordinate del punto trasformato.

In CARTESIO le matrici vengono usate sia per le trasformazioni geometriche che per le proiezioni. Infatti una operazione particolarmente interessante delle matrici, il prodotto matriciale, può essere usato proficuamente per semplificare le operazioni: se ad ogni trasformazione geometrica (traslazione, rotazione ecc.) viene associata una matrice di trasformazione, per ottenere un punto trasformato è sufficiente porre le coordinate del punto stesso in un vettore e moltiplicare quest'ultimo per la matrice di trasformazione. Inoltre, dovendo sottoporre il punto a molte trasformazioni, è possibile prima moltiplicare tra loro le varie matrici di trasformazione per poi moltiplicare il vettore del punto per la matrice finale, ottenuta attraverso la serie di moltiplicazioni matriciali.

Prima di proseguire è però necessario introdurre, sia pur brevemente, il concetto di "coordinate omogenee". Il punto $P(1,2,3)$ può essere scritto nella forma vettoriale: $[1 \ 2 \ 3]$, dove il valore 1 si riferisce alla coordinata X del punto, 2 alla coordinata Y e 3 alla coordinata Z.

Il vettore $[k1 \ k2 \ k3 \ k]$, con k diverso da 0 e con la convenzione di dividere ogni elemento del vettore per il quarto termine, è del tutto equivalente al vettore $[1 \ 2 \ 3]$, come anche i vettori $[2 \ 4 \ 6 \ 2]$ e $[3 \ 6 \ 9 \ 3]$.

L'apparente complicazione di moltiplicare ogni elemento del vettore per una costante k e di usare un vettore a quattro elementi anziché tre per identificare un punto posto nello spazio, si spiega invece se si considera, ad esempio, la forma di una matrice di trasformazione di traslazione.

Così, ad esempio, la matrice riportata di seguito costituisce una matrice di traslazione

$$\text{Traslazione} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{T_x} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{T_y} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{T_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si noterà che la matrice di trasformazione, basata su di una matrice identità, è di ordine 4 e non 3, come si potrebbe pensare, trattandosi di trasformazioni tridimensionali. Ma così come, nel disegno tradizionale, dovendo ribaltare un piano, è necessario passare temporaneamente alle tre dimensioni, ruotando idealmente il foglio attorno ad un asse, anche nel caso della geometria analitica si rivela necessario l'uso di una "dimensione in più" rispetto alle tre dimensioni dello spazio.

Inoltre in tal modo è reso possibile definire rigorosamente coordinate di elementi impropri: ad esempio il punto $[1 \ 2 \ 3 \ 0]$.

Nell'esempio proposto (con valori di traslazione di 1.5 in X, 2.5 in Y e 3.5 in Z):

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 6.5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Le matrici di rotazione attorno agli assi X, Y e Z, dove β è l'angolo di rotazione conteggiato con la regola della mano destra, avranno le forme seguenti:

$$\text{Rotazione attorno all'asse X} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Per la rotazione attorno all'asse **Y** la matrice sarà invece la seguente:

$$\text{Rotazione attorno all'asse Y} \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Mentre per la rotazione attorno all'asse **Z** la matrice sarà:

$$\text{Rotazione attorno all'asse Z} \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice per la scalatura omogenea (omotetia) nei tre assi (fattore di scala **S**) è invece:

$$\text{Scalatura omogenea} \begin{vmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice per la scalatura non omogenea nei tre assi (fattori di scala **Sx**, **Sy**, **Sz**) è la seguente:

$$\text{Scalatura non omogenea} \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Le matrici per le riflessioni rispetto ai piani cartesiani sono date nelle seguenti forme:

$$\begin{array}{l} \text{Riflessione} \\ \text{rispetto al piano XY} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Riflessione} \\ \text{rispetto al piano XZ} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Riflessione} \\ \text{rispetto al piano YZ} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Riprendendo l'esempio d'uso, se si deve prima traslare un punto, poi scalarlo, poi ruotarlo attorno all'asse X e sottoporlo ad altre trasformazioni geometriche, basterà moltiplicare la matrice di trasformazione di traslazione per quella di scalatura; moltiplicare poi la matrice così ottenuta per la matrice di rotazione attorno all'asse X e così via, ottenendo alla fine una sola matrice che contiene in sé tutte le trasformazioni precedenti.

Moltiplicando il vettore che identifica il punto per quella matrice si otterrà il punto trasformato. Inoltre se si inverte la matrice finale, moltiplicando il punto trasformato per la matrice inversa si ritroveranno le coordinate del punto iniziale.

L'uso delle matrici di trasformazione può essere esteso anche alle trasformazioni proiettive. Così, ad esempio, una matrice prospettica, con centro di proiezione sull'origine, piano di proiezione parallelo al piano XY e posto a distanza d dall'origine, avrà la forma:

$$\begin{array}{l} \text{Prospettiva} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{vmatrix}$$

Anche tutte le altre proiezioni, siano esse ortogonali o assonometriche, possono essere identificate da una matrice di trasformazione, ma non verranno approfondite in questa sede: chi desiderasse farlo potrà trovare ampio materiale di studio nelle pubblicazioni suggerite nella sezione 2.1.

In questa sede preme far rilevare che sia le trasformazioni geometriche sia le proiezioni sul piano possono essere ricondotte ad una matrice, che le matrici possono essere moltiplicate tra loro sommando gli effetti delle singole matrici ed infine che moltiplicando un vettore per la matrice prodotto si ottengono le coordinate del punto trasformato e moltiplicando quest'ultimo per la matrice inversa si riottiene il punto di partenza.

2.13 SHADING, SUPERFICI E WIRE-FRAME

Un oggetto tridimensionale è formato da molte facce, ma solo una parte di queste vengono viste ed alcune possono essere parzialmente nascoste da altre facce dello stesso oggetto o da altri oggetti più vicini all'osservatore e posti sulla stessa linea di vista.

Nella grafica al computer vi sono varie modalità di rappresentazione di un oggetto. Di queste ne vengono qui presentate due:

- la modalità **wire-frame** (a filo di ferro) considera gli oggetti come nuvole di punti collegati tra loro da segmenti, gli spigoli degli oggetti stessi. Non esiste dunque il concetto di interno ed esterno o di faccia, ma solo quelli di punto e linea.

In questo caso gli oggetti vengono rappresentati sempre e comunque con tutti gli spigoli, siano essi visibili o invisibili, perché non è possibile, non possedendo le informazioni sulle facce, stabilire se uno spigolo è nascosto o meno.

- la modalità **boundary surface** (per superfici di contorno) prevede invece che gli oggetti siano formati da facce, ciascuna delimitata da un perimetro chiuso. Così si potrà verificare, per ogni faccia, se essa è invisibile o visibile, anche solo parzialmente. Inoltre potrà essere assegnata ad ogni faccia una sfumatura di colore, che dipenderà dall'orientamento della faccia rispetto alla fonte luminosa (*shading*).

Esistono vari algoritmi per il calcolo delle superfici nascoste e per l'assegnazione dei colori alle superfici. In questa sede verrà descritto il metodo usato da CARTESIO, noto anche con il nome di "algoritmo del pittore", poiché, come farebbe un pittore alle prese con un dipinto, per ottenere una corretta rappresentazione prima vengono tracciate le facce più lontane dall'osservatore e poi via via le più vicine che potranno nascondere o meno le facce già disegnate.

È stato scelto questo metodo soprattutto perché risulta più veloce degli altri con un numero limitato di facce: ad esempio il programma AutoCAD, che utilizza un

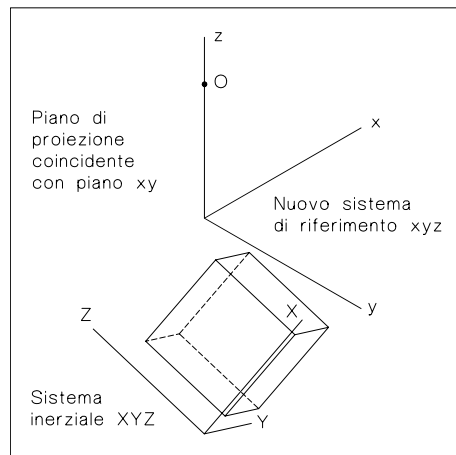


Fig. 2-27 Roto-traslazione del modello reale

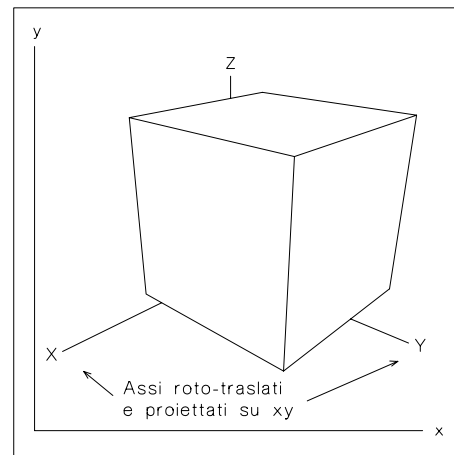


Fig. 2-28 Trasformazione proiettiva

altro algoritmo, impiega, per alcune decine di facce, un tempo da 20 a 30 volte superiore per il disegno della scena e per 1000 facce, il limite massimo di CARTESIO, un tempo comunque da 4 a 10 volte superiore. Per un numero di 3/5000 facce, l'algoritmo usato da AutoCAD ha un'efficienza paragonabile a quello del pittore e per un numero superiore di facce risulta via via sempre più veloce. Ma poiché CARTESIO prevede un numero massimo di 1000 facce (spesso molte di meno) e richiede tempi di visualizzazione molto rapidi, la scelta di quell'algoritmo era inevitabile.

Come anche in AutoCAD, in CARTESIO non sempre le intersezioni tra solidi vengono rese correttamente: il test di intersezione di ogni faccia con tutte le altre avrebbe infatti comportato un aumento dei tempi di calcolo del tutto sproporzionato e ingiustificato.

Per rendere efficiente l'algoritmo, tutte le facce sono piane e triangolari: così una faccia quadrangolare è formata da due triangoli, una pentagonale da tre e così via. L'uso di facce triangolari rende molto più semplice la suddivisione delle facce e il calcolo delle intersezioni.

I passi svolti dal programma CARTESIO ogni volta che viene rappresentato a video un modello, possono essere così sintetizzati:

A) Per ogni faccia del modello reale viene calcolato l'angolo di incidenza della retta direzione di luce. La prima legge di Lambert dice che l'illuminamento L prodotto da una sorgente luminosa puntiforme di intensità I , lungo una certa direzione e a distanza D , è data dalla formula $L = I \cos \beta / D^2$, dove β è l'angolo tra la direzione di luce e la perpendicolare alla superficie. Se la distanza è infinita (come è il caso di CARTESIO) e l'intensità unitaria la formula si riduce a mettere in relazione L con il coseno dell'angolo β : quando l'angolo tra direzione luce e perpendicolare alla faccia è di zero gradi (direzione luce perpendicolare alla faccia) l'illuminamento è massimo; quando l'angolo è di 90 gradi (direzione luce parallela alla faccia) l'illuminamento è nullo.

In CARTESIO le facce con illuminamento nullo non sono rappresentate di colore nero ma semplicemente con la sfumatura di colore più scura tra le 25 disponibili per ogni colore di base.

B) Sul piano di proiezione viene adagiato un sistema di riferimento per la rappresentazione (xyz) in modo che la retta di vista coincida con l'asse delle z , il punto principale con l'origine degli assi e dunque il piano di proiezione coincida con il piano xy del nuovo sistema (vedi figura 2-27). Nelle assonometrie oblique viene solo posto il piano di proiezione coincidente con il piano xy .

C) Tutti i punti del modello reale vengono trasformati secondo la matrice di proiezione prescelta: vengono dunque proiettati sul piano xy . In questo modo, osservando in pianta il modello proiettato (e dunque "dall'infinito" anche per le proiezioni coniche), si ottiene una vista del tutto identica a quella che si avrebbe guardando lo stesso modello non proiettato dal giusto punto di vista (vedi figura 2-28). Vengono così uniformate le caratteristiche delle proiezioni coniche (centro di proiezione posto a distanza finita dagli oggetti) e cilindriche (centro di proiezione a distanza infinita dagli oggetti). Da notare che le matrici di proiezione si riferiscono a questo sistema locale, non tenendo conto dunque della giacitura del piano di proiezione.

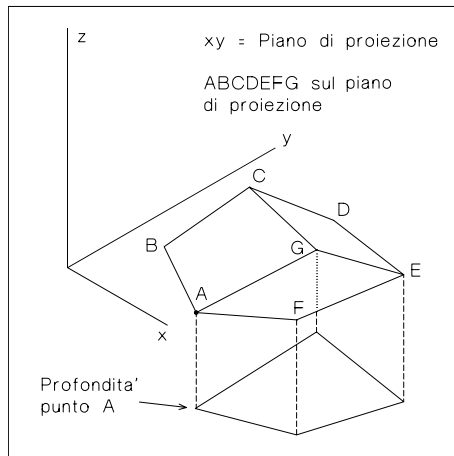


Fig. 2-29 Profondità delle facce proiettate

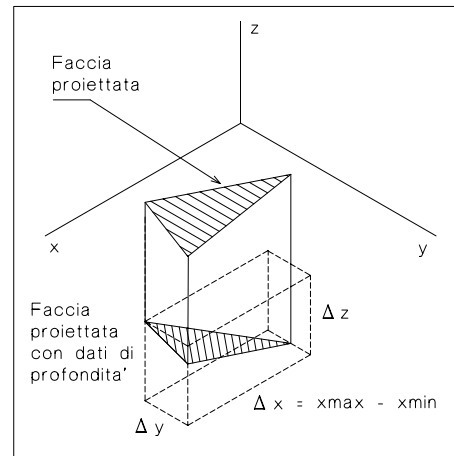


Fig. 2-30 Bounding-box di una faccia

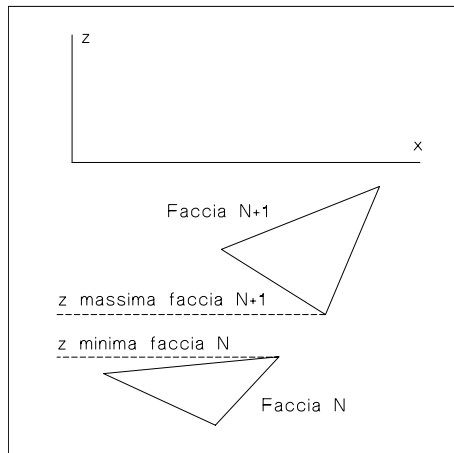


Fig. 2-31 Confronto Zmassima e Zminima

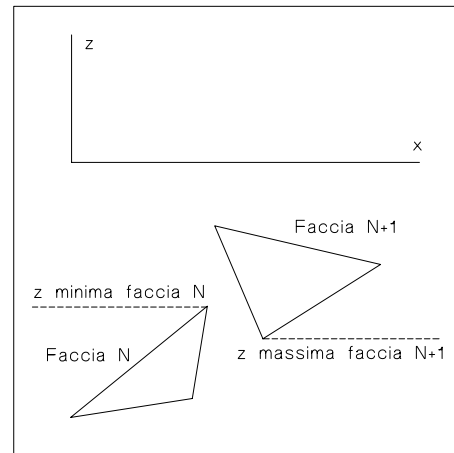


Fig. 2-32 Sovrapposizione Zmassima Zminima

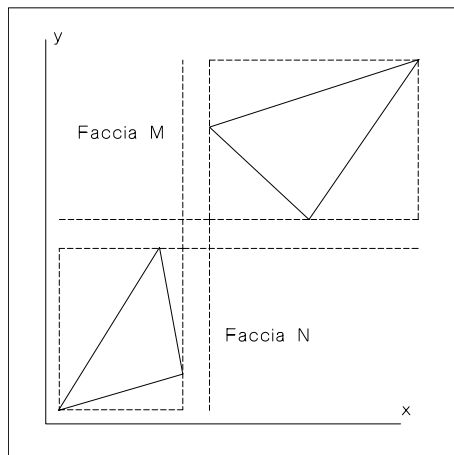


Fig. 2-33 Sovrapposizione in X e Y

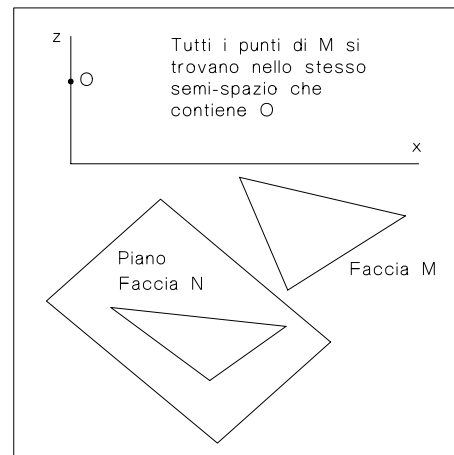


Fig. 2-34 Facce e semi-spazi

D) Ad ogni punto viene associata, perpendicolarmente al piano xy , una profondità che dipende dalla distanza del punto stesso dal centro di proiezione. Le profondità non sono “visibili” dall’osservatore, visto che questo vede la scena in pianta da distanza infinita e che queste sono ortogonali al piano di rappresentazione, ma serviranno successivamente per la verifica della profondità di ogni faccia rispetto alle altre (vedi figura 2-29).

E) Vengono eliminate le facce trasformate perpendicolari al piano di proiezione (che risultano dunque ridotte ad una linea) e le facce orientate verso il semi spazio che non contiene il centro di proiezione. Una faccia è definita da tre punti e pertanto, a partire da un qualsiasi punto, potrà essere percorsa in senso orario o anti-orario. Usando i tre punti che la definiscono, è facile determinare il vettore perpendicolare alla faccia trasformata: è sufficiente infatti trovare il prodotto vettoriale tra i due vettori che uniscono il primo al secondo punto della faccia e il secondo al terzo punto.

Una volta trovato il vettore perpendicolare è possibile stabilire con certezza se l’esterno della faccia è rivolto o meno verso l’osservatore. Se si è certi che i solidi sono tutti chiusi, allora quella faccia non potrà essere vista in nessun caso e potrà essere eliminata dalla lista.

Ad esempio un cubo visto in proiezione ortogonale avrà quattro facce perpendicolari al quadro e una faccia non rivolta verso l’osservatore: resterà dunque una sola faccia visibile, diminuendo di molto i tempi di calcolo.

Nel caso però di sezioni o di ingresso in CARTESIO di file DXF, non è possibile stabilire a priori se i solidi siano chiusi o se le facce siano tutte definite con verso orario o anti-orario e pertanto non potranno essere eliminate le *back-faces* (facce rivolte al contrario, rispetto all’osservatore), pur potendo invece cancellare le facce trasformate perpendicolari al piano di proiezione.

F) Per ogni faccia trasformata rimasta nella lista viene calcolato il *bounding box*, vale a dire il prisma retto a base rettangolare che contiene l’intera faccia (vedi figura 2-30). Ad ogni faccia saranno dunque associate una $Z_{massima}$ (la coordinata z del punto più lontano dal piano xy) e una Z_{minima} (la coordinata z più vicina) ed anche una $X_{massima}$ (la coordinata X del punto più lontano dall’origine lungo l’asse X) e una X_{minima} , una $Y_{massima}$ e Y_{minima} .

G) Le facce vengono ordinate secondo la loro profondità massima lungo la coordinata z : viene cioè creata una lista che contiene all’inizio la faccia con la $Z_{massima}$ più grande e alla fine quella con la $Z_{massima}$ più piccola.

H) Partendo dall’inizio della lista (dalle facce più lontane dall’osservatore) si disegnano via via le facce. Si danno due possibilità:

1) Se la faccia $N+1$ ha la sua $Z_{massima}$ più piccola della Z_{minima} della faccia N (vedi figura 2-31), allora si disegna la faccia N e si prosegue ad analizzare la faccia successiva.

2) In caso contrario due o più facce possono sovrapporsi e non è certo se si debba disegnare prima la faccia N e poi la faccia $N+1$ o viceversa (vedi figura 2-32).

D) Ad ogni punto viene associata, perpendicolarmente al piano xy , una profondità che dipende dalla distanza del punto stesso dal centro di proiezione. Le profondità non sono “visibili” dall’osservatore, visto che questo vede la scena in pianta da distanza infinita e che queste sono ortogonali al piano di rappresentazione, ma serviranno successivamente per la verifica della profondità di ogni faccia rispetto alle altre (vedi figura 2-29).

E) Vengono eliminate le facce trasformate perpendicolari al piano di proiezione (che risultano dunque ridotte ad una linea) e le facce orientate verso il semi spazio che non contiene il centro di proiezione. Una faccia è definita da tre punti e pertanto, a partire da un qualsiasi punto, potrà essere percorsa in senso orario o anti-orario. Usando i tre punti che la definiscono, è facile determinare il vettore perpendicolare alla faccia trasformata: è sufficiente infatti trovare il prodotto vettoriale tra i due vettori che uniscono il primo al secondo punto della faccia e il secondo al terzo punto.

Una volta trovato il vettore perpendicolare è possibile stabilire con certezza se l’esterno della faccia è rivolto o meno verso l’osservatore. Se si è certi che i solidi sono tutti chiusi, allora quella faccia non potrà essere vista in nessun caso e potrà essere eliminata dalla lista.

Ad esempio un cubo visto in proiezione ortogonale avrà quattro facce perpendicolari al quadro e una faccia non rivolta verso l’osservatore: resterà dunque una sola faccia visibile, diminuendo di molto i tempi di calcolo.

Nel caso però di sezioni o di ingresso in CARTESIO di file DXF, non è possibile stabilire a priori se i solidi siano chiusi o se le facce siano tutte definite con verso orario o anti-orario e pertanto non potranno essere eliminate le *back-faces* (facce rivolte al contrario, rispetto all’osservatore), pur potendo invece cancellare le facce trasformate perpendicolari al piano di proiezione.

F) Per ogni faccia trasformata rimasta nella lista viene calcolato il *bounding box*, vale a dire il prisma retto a base rettangolare che contiene l’intera faccia (vedi figura 2-30). Ad ogni faccia saranno dunque associate una $Z_{massima}$ (la coordinata z del punto più lontano dal piano xy) e una Z_{minima} (la coordinata z più vicina) ed anche una $X_{massima}$ (la coordinata X del punto più lontano dall’origine lungo l’asse X) e una X_{minima} , una $Y_{massima}$ e Y_{minima} .

G) Le facce vengono ordinate secondo la loro profondità massima lungo la coordinata z : viene cioè creata una lista che contiene all’inizio la faccia con la $Z_{massima}$ più grande e alla fine quella con la $Z_{massima}$ più piccola.

H) Partendo dall’inizio della lista (dalle facce più lontane dall’osservatore) si disegnano via via le facce. Si danno due possibilità:

1) Se la faccia $N+1$ ha la sua $Z_{massima}$ più piccola della Z_{minima} della faccia N (vedi figura 2-31), allora si disegna la faccia N e si prosegue ad analizzare la faccia successiva.

2) In caso contrario due o più facce possono sovrapporsi e non è certo se si debba disegnare prima la faccia N e poi la faccia $N+1$ o viceversa (vedi figura 2-32).

Si attiva pertanto un ciclo di verifica che prende in considerazione tutte le facce ($N+1$, $N+2$ ecc. denominate M d'ora in poi) le cui $Z_{massime}$ sono più grandi della Z_{minima} della faccia N ; verifica tendente ad escludere la sovrapposizione o lo scambio.

Per ogni faccia presa in considerazione:

— Se la faccia M non si sovrappone in x o y alla faccia N (vedi figura 2-33), allora le due facce non si possono sovrapporre in nessun caso.

— Se tutti i vertici della faccia M si trovano nel semi-spazio, definito dal piano per N , che contiene il centro di proiezione, allora la faccia M è sicuramente più vicina all'osservatore della faccia N (vedi figura 2-34).

— Successivamente, solo se nessuno dei test precedenti è risultato vero, si verifica se invece tutti i punti della faccia N stiano nel semi-spazio, definito dal piano per M , che non contiene il centro di proiezione.

— Dopo aver fallito nei test precedenti si deve verificare che i due triangoli che definiscono le facce proiettate non si intersechino tra loro: vale a dire che nessun punto appartenente ad un triangolo deve essere interno all'altro.

Se tutti i test hanno fallito allora si scambiano tra loro le facce nella lista e, se lo scambio è già stato fatto, si dovrà dividere il triangolo M in due triangoli, usando il piano per N , poiché una parte del triangolo M sarà visibile ed un'altra sarà nascosta.

Come è possibile notare ogni volta che si modifica la rappresentazione il computer dovrà eseguire un numero elevato di calcoli: numero che cresce con progressione geometrica in relazione al numero totale di facce. Così se per 10 facce il tempo richiesto è di 1 ms (millisecondi o millesimi di secondo), per 100 facce il tempo non sarà 10 ms ma 40 o 50 ms e per 1000 facce potrà variare tra 2 e 5 secondi (2000-5000 ms), secondo la complessità del modello reale. Evidentemente i tempi assoluti dipendono dalla velocità del computer ma verranno comunque sempre mantenute le proporzioni tra i vari tempi.