La ricerca di rapporti notevoli tra lunghezze rilevate

Camillo Trevisan

http://www.iuav.unive.it/dpa/ricerche/trevisan/propor.htm

Nell'analisi di una architettura, specie se classica o rinascimentale, molto spesso ci si imbatte in elementi architettonici probabilmente dotati di specifici e ben definiti rapporti tra le parti: ad esempio l'altezza di una colonna potrà essere cinque, sei, sette volte il diametro di base, oppure il rapporto tra l'altezza e la larghezza di una stanza potrà essere, sempre come esempio, di 3 a 5, 4 a 5 o anche di 2 a 3.
Nel caso di misure rilevate direttamente sul manufatto (non reperite dunque nel progetto, in forma di quota scritta), si troveranno però dei valori solamente vicini ai rapporti detti, mai esattamente coincidenti con quelli.
È dunque importante, almeno, conoscere il valore di probabilità che il rapporto trovato sia reale e non casuale.
La certezza che una membratura architettonica stia in un dato rapporto con un'altra, si potrà invece ottenere solo nel caso si disponga di esplicite "dichiarazioni di intenti", stante l'impossibilità di trovarla nella realtà misurata.

Imprecisioni della misura

Nel passaggio dal progetto al reperimento della misura di un manufatto architettonico intervengono almeno tre distinti fattori:
A) Imprecisioni nella costruzione o modifiche in corso d'opera.
B) Deformazioni successive.
C) Imprecisioni nella misurazione.
Non è possibile stabilire a priori le possibili entità di queste imprecisioni: ad esempio le differenze tra elementi prefabbricati, come i mattoni, sono spesso minime, mentre conci di pietra di dimensioni simili possono presentare variazioni ben più marcate.
Inoltre fenomeni naturali, come terremoti o subsidenza del terreno, o più semplicemente cedimenti e compressioni possono modificare sensibilmente le dimensioni complessive di un edificio, anche se di norma non riguardano i singoli elementi. Il passaggio più importante, ed anche forse il più aleatorio, è dunque dato dalla definizione dell'ambito di incertezza della misura, ambito che dipende strettamente dal tipo di manufatto, dalla sua epoca e grandezza, oltre che dal materiale.
Le tabelle e le tavole che seguono hanno l'unico scopo di rendere evidenti le difficoltà che si presentano a chi tenti di individuare con sicurezza un dato rapporto o una proporzione, a partire da misure rilevate su di un monumento o lette su di un grafico di progetto o di rilievo.
La tabella A riporta, per esemplificazione, i possibili rapporti tra numeri interi compresi tra 1 e 10, alcune radici quadrate particolarmente interessanti e ricorrenti ed il valore della sezione aurea[1]: in tutto ben 38 valori diversi tra loro, compresi tra 0.1 e 0.9 e, da notare, non equamente distribuiti tra questi due estremi (vedi grafico in alto a destra a p. 3).
La tabella B riprende molti dei valori della tabella A - solo quelli relativi alle frazioni decimali - esponendoli in forma più immediata.

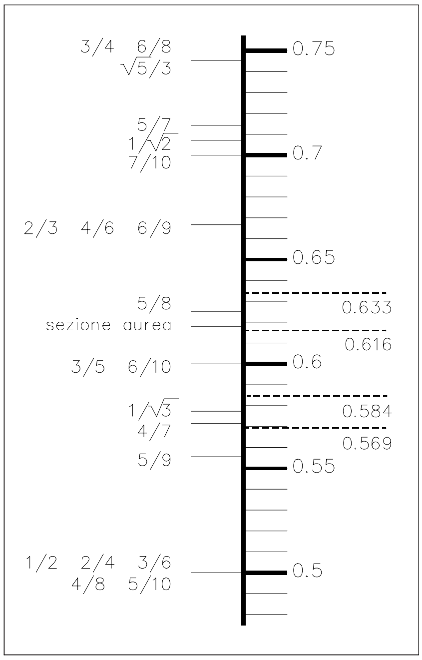
I rapporti tra le parti

Se alle misure rilevate si associa un "ambito di probabilità"; vale a dire se si stabilisce un intervallo, dipendente dalla natura delle misure e dalle tecniche del rilievo, all'interno del quale la misura "vera" può cadere con ogni probabilità, è allora possibile definire anche un valore, che chiameremo l'incertezza, relativo al rapporto tra due misure.

[1] *La sezione aurea di un segmento è data dalla parte media proporzionale tra tutto il segmento e la parte rimanente.*
Se A e B sono i punti estremi del segmento: AB : AX = AX : XB dove X è compreso tra A e B e AX è la sezione aurea di AB. Se il segmento ha lunghezza unitaria, allora AX avrà lunghezza 0.618033989...
In termini matematici la sezione aurea è data da: $(\sqrt{5}-1)/2$ ed è pertanto un numero irrazionale.
La sezione aurea (denominata d'ora in poi F) possiede alcune interessanti proprietà matematiche:
A) $1 / F = 1 + F$ *e dunque* $1 / 0.618034 = 1.618034$
B) $F^2 = 1 - F$ *e dunque* $0.618034^2 = 0.381966$
C) Il rapporto tra due valori vicini della serie di Fibonacci tende al valore di F.
La serie di Fibonacci è data da una sequenza infinita di numeri interi (con valori iniziali 0 e 1), nella quale ogni numero è dato dalla somma dei due numeri precedenti:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...
Ad esempio 89/144 = 0.6180555, mentre 144/233 = 0.6180257, ed ancora 233/377=0.6180371, e così via fino a convergere rapidamente al valore di F.
Per uno studio approfondito sulla sezione aurea si veda, ad esempio: Matila Ghyka, Le Nombre d'Or*, Gallimard, Paris 1931.*

Tabella A - Possibili rapporti tra numeri interi compresi tra 1 e 10, alcune radici quadrate e la sezione aurea.

0.1	1/10				
0.1111111	1/9				
0.125	1/8				
0.1428571	1/7				
0.1666666	1/6				
0.2	1/5	2/10			
0.2222222	2/9				
0.25	1/4	2/8			
0.2857143	2/7				
0.3	3/10				
0.3333333	1/3	2/6	3/9		
0.375	3/8				
0.4	2/5	4/10			
0.4285714	3/7				
0.4444444	4/9				
0.4472136	1/√5				
0.5	1/2	2/4	3/6	4/8	5/10
0.5555555	5/9				
0.5714286	4/7				
0.5773503	1/√3				
0.6	3/5	3/10			
0.6180340	Sezione aurea				
0.625	5/8				
0.6666666	2/3	4/6	6/9		
0.7	7/10				
0.7071068	1/√2				
0.7142857	5/7				
0.7453560	√5/3				
0.75	3/4	6/8			
0.7777777	7/9				
0.8	4/5	8/10			
0.833333	5/6				
0.8571429	6/7				
0.8660254	√3/2				
0.875	7/8				
0.8888888	8/9				
0.8944272	2/√5				
0.9	9/10				



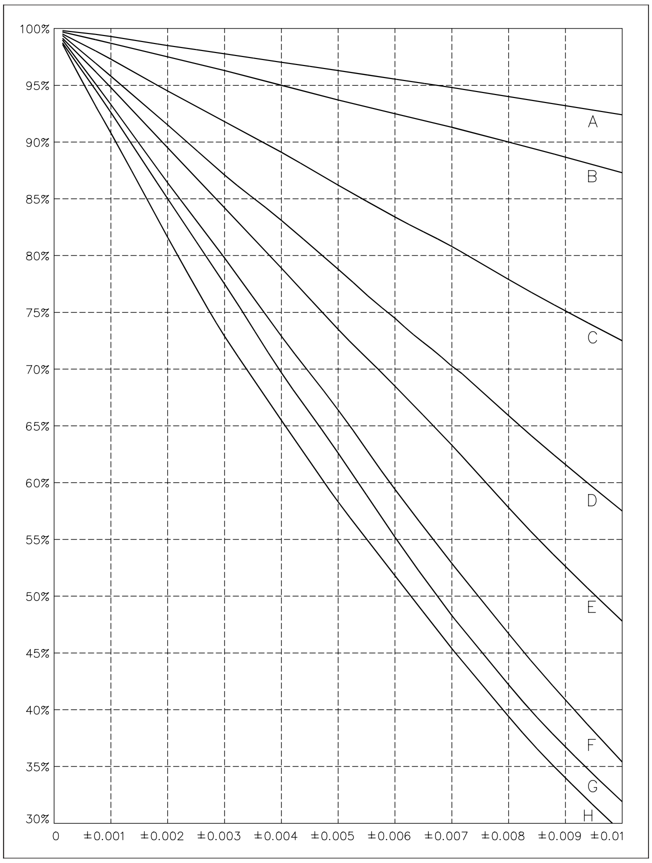
Si considerino, ad esempio, le due misure di 10 e 6 metri: il loro rapporto è pari a 0.6. Se però ad ogni misura si associa un ambito complessivo di incertezza di +/- 20 cm, allora si troverà un "intervallo di probabilità" così definito:
- Limite inferiore: 5.8 / 10.2 = 0.569.
- Limite superiore: 6.2 / 9.8 = 0.633.
Riportando i due limiti appena trovati sul grafico si vedrà che all'interno dell'intervallo di probabilità cadono, oltre al rapporto 0.6 relativo a 6/10, anche i rapporti 4/7, 1/√3, la sezione aurea e 5/8.
Riducendo il margine di errore o l'incertezza a +/- 10 cm, i nuovi limiti sono:
- Limite inferiore: 5.9 / 10.1 = 0.584.
- Limite superiore: 6.1 / 9.9 = 0.616.
Come è possibile notare, il nuovo intervallo di probabilità contiene al suo interno solo il rapporto 6/10, sfiorando appena quello della sezione aurea.

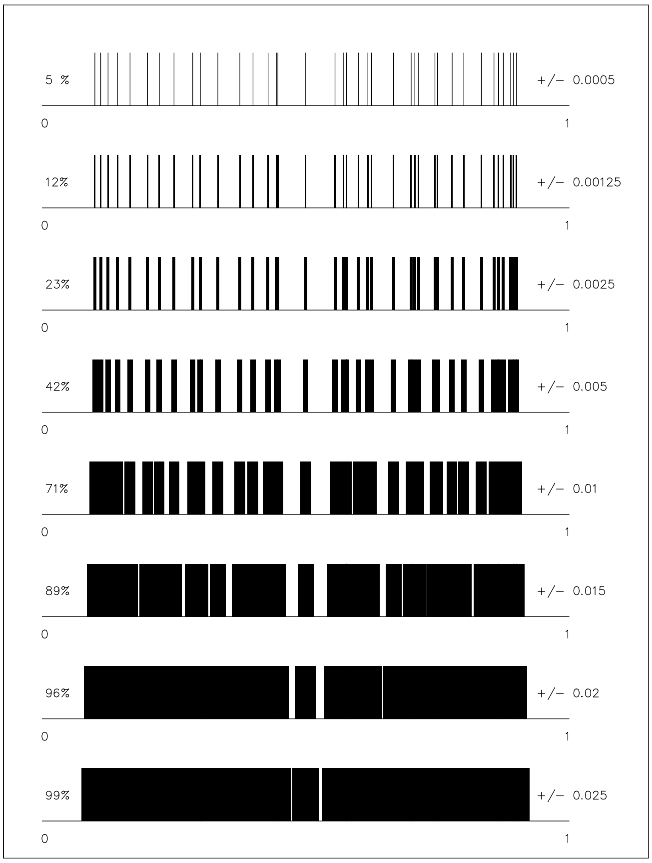
Tabella B - Valori delle frazioni decimali, espressi in forma tabellare.

2	0.5								
3	0.333333	0.666666							
4	0.25	0.5	0.75						
5	0.2	0.4	0.6	0.8					
6	0.166666	0.333333	0.5	0.666666	0.833333				
7	0.142857	0.285714	0.428571	0.571428	0.714285	0.857143			
8	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875		
9	0.111111	0.222222	0.333333	0.444444	0.555555	0.666666	0.777777	0.888888	
10	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

Tabella C - Percentuali di rapporti trovati (compresi tra 0.1 e 0.9) in relazioni agli errori ammessi.

	Ambito di incertezza	**+/- 0.0005**	**+/- 0.001**	**+/- 0.005**	**+/- 0.01**
A	Righe 2, 3, 4 della Tabella B	99.4 %	99.1 %	96.1 %	92.2 %
B	Righe 2, 3, 4, 5 della Tabella B	98.9 %	98.4 %	93.4 %	87.6 %
C	Righe 2, 3, 4, 5, 6 della Tabella B	98.6 %	97.3 %	86.2 %	72.5 %
D	Righe 2, 3, 4, 5, 6, 7 della Tabella B	97.9 %	95.8 %	78.8 %	57.5 %
E	Righe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 della Tabella B	97.2 %	94.9 %	73.5 %	47.9 %
F	Righe 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 della Tabella B	96.7 %	93.3 %	66.4 %	35.4 %
G	Tutti i valori della Tabella B	96.2 %	92.6 %	62.6 %	31.9 %
H	Tutti i valori della Tabella A	95.3 %	90.8 %	58.3 %	29.2 %





Se, ad esempio, la misura A è 12 metri e si ritiene che l'incertezza di misura sia di +/- 2 centimetri (valore del resto molto basso) e la misura B è 6 metri, con incertezza ancora di +/- 2 centimetri, il loro rapporto potrà variare tra i due valori: 0.4975 (5.98/12.02) e 0.5025 (6.02/11.98).
La differenza tra i due possibili rapporti estremi è pari a 0.005, vale a dire +/- 0.0025, un numero puro non legato all'unità di misura.
La tabella C ed il grafico in alto a sinistra contengono le percentuali di probabilità statistica che il rapporto "vero" sia 0.5: se il rapporto è cercato tra tutti i numeri della tabella A, la percentuale di probabilità che le due lunghezze stiano tra loro nel rapporto 0.5 è pari a circa il 77% (interpolando linearmente - con un piccolo errore, dato che in realtà l'andamento non è su di una retta ma su di una curva - tra i valori di incertezza delle misure relativi a +/- 0.001 e +/- 0.005 o tra +/- 0.002 e +/- 0.003).
Sarà invece del 98% se il rapporto è cercato solo tra i valori 0.25, 0.3333, 0.5, 0.6666 e 0.75 (righe 2, 3 e 4 della tabella B).
Eliminando dal conteggio alcuni valori, le percentuali aumentano, poiché è meno probabile che l'intervallo che circonda il valore dato cada su di un altro possibile rapporto e dunque è più probabile che il rapporto calcolato sia effettivamente quello cercato.
È importante notare che la tabella fornisce solo una probabilità statistica, non la certezza che il rapporto trovato sia quello vero: se anche la probabilità stimata fosse del 99% è sempre possibile che il vero rapporto sia dato dalla centesima ricorrenza e la risposta sia dunque falsa.
L'interesse delle tabelle proposte consiste pertanto solo nel dare alcune indicazioni di carattere generale e nel rendere scientificamente sostenibile una stima probabilistica.
Stima che altrimenti dovrebbe essere fatta senza alcun fondamento e che, dati i complessi calcoli necessari, probabilmente sarebbe del tutto errata.

Il grafico in alto a destra mostra visivamente il diminuire della probabilità di trovare il giusto rapporto, con l'aumentare dell'intervallo di incertezza. In ascissa sono riportate tante barre verticali quanti sono i valori della tabella A; valori distribuiti tra 0.1 e 0.9. Ad ogni barra è associato uno spessore, dipendente dall'incertezza (da +/-0.025, in basso, a +/- 0.0005 in alto). Sulla sinistra si possono leggere i valori di probabilità legati a quell'incertezza. Dal grafico risulta evidente che, con l'aumentare dell'incertezza (lo spessore delle barre), alcuni valori (alcune barre) si sovrappongono, rendendo impossibile stabilire se un rapporto trovato si riferisca ad un valore o ad un altro, vicino a quello considerato.
Il grafico in alto a sinistra è relativo alla tabella C. Ciascuna curva si riferisce ad una riga di quella tabella ed illustra le probabilità statistiche relative all'individuazione del giusto rapporto, in funzione del massimo numero possibile di misure considerate. Ad esempio, considerando tutti i 38 possibili valori riportati nella tabella A (curva H), e un'incertezza di +/- 0.008 (equivalente a circa +/- 4 cm su 10 m), si ottiene, complessivamente, una probabilità del 39% che il rapporto cercato sia quello calcolato. Riducendo i valori a quelli contenuti nelle righe da 2 a 6 della tabella B (curva C), la probabilità, sempre in termini generali, sale al 78%.