

Programma EUCLID Restituzione prospettica funzione di regole compositive

Camillo Trevisan

<http://www.inan.unive.it/dpa/ricerche/trevisan/euclid.htm>

Premessa

La restituzione prospettica consente di ridelineare la realtà tridimensionale rappresentata in una prospettiva. Essendo un processo che generalmente trasforma coordinate dal piano allo spazio, richiede evidentemente qualche informazione in più, oltre a quelle fornite dalla rappresentazione prospettica. La visione umana, ad esempio, non è altro che una continua restituzione prospettica delle immagini retiniche. Certo, in questo siamo aiutati dalla visione stereoscopica che ci consente, soprattutto alle brevi distanze, una discreta stima delle profondità (la terza dimensione mancante) ma è soprattutto la nostra cultura, in senso lato, e l'esperienza che in realtà ci consentono di vedere.¹

Ed infatti da lungo tempo si conoscono gli effetti del *trompe l'œil*, vale a dire di oggetti o immagini che ingannano l'occhio ed il cervello incaricato di decifrare le immagini.²

Basta porre l'occhio allo spioncino della *distorted room* di Ames, perché tutte le nostre capacità percettive siano ingannate. Le ipotesi, apparentemente suffragate da quello che vediamo (sedie, porte, pareti, suppellettili), sono in realtà false, ma preferiamo credere di vedere, in due uomini normali posti nella stanza, un nano ed un gigante piuttosto di rinunciare alle nostre certezze: che un pavimento ed un soffitto siano orizzontali, le pareti verticali, le porte e le sedie di dimensioni uguali tra loro.

Dunque, al di là della limitata capacità oggettiva di stima binoculare delle profondità, la nostra interazione visiva si fonda essenzialmente sul continuo ciclo di stima di ciò che dovrebbe essere e verifica che così è o nella correzione delle ipotesi di partenza.

Nella restituzione prospettica di dipinti ed affreschi, purtroppo, non si ha la possibilità di guardare la realtà da un altro punto: l'unica *realtà* di cui disponiamo, infatti, è già essa stessa una prospettiva. Solo ponendo l'occhio nel punto di vista preferenziale, il centro di proiezione utilizzato dall'artista, e formulando, anche inconsapevolmente, un congruo numero di ipotesi circa le caratteristiche degli oggetti rappresentati, è possibile vedere, appunto come attraverso una finestra, la *realtà virtuale* utilizzata per la sua costruzione.

Viene qui presentato un metodo, basato su di un programma per computer denominato EUCLID, in grado di effettuare la restituzione di una prospettiva, indipendentemente dalla tecnica utilizzata per produrla e dal tipo e conformazione della superficie che la contiene.

È forse utile dare subito alcune definizioni che utilizzeremo da qui in avanti. Innanzi tutto definiamo come **prospettiva** qualsiasi metodo sistematico (riproducibile) per la rappresentazione dello spazio su qualsiasi superficie piana o curva o in qualsivoglia altra forma, anche tridimensionale, utilizzando uno o più centri di proiezione.

¹ "La possibilità di una lettura corretta dell'immagine è governata da tre variabili: il codice, il testo e il contenuto."

Nell'articolo introduttivo ad una raccolta di saggi, Gombrich mette in luce come "una figura ha, per chi la osserva, un significato che dipende dalle proprie esperienze e conoscenze. Da questo punto di vista l'immagine non è una mera rappresentazione della realtà, bensì un sistema simbolico."

D'altra parte, nella stessa raccolta, R.L.

Gregory illustra in che modo figure semplici possano apparire distorte o complesse proprio perché "il sistema visivo è costretto a interpretare un mondo nel quale gli oggetti sono normalmente distorti dalla prospettiva". In A.A. V.V., Illusione e realtà. Problemi della percezione visiva, Le Scienze, Milano 1978.

² *Uno dei prototipi di trompe voluta deliberatamente è probabilmente da attribuirsi a Fidia: "In occasione di un concorso per una Minerva destinata a coronare un alto pilastro, Alcamene scolpì una statua armoniosa, Fidia una figura dalle membra deformate, con la bocca spalancata e il naso allungato. Il giorno in cui le due opere vennero esposte, la prima ottenne tutti i suffragi mentre la rivale per poco non venne presa a sassate. Ma la situazione si ribaltò quando le due statue furono collocate al loro posto. Collocata sulla sommità della colonna, la statua di Fidia diventò bellissima mentre l'altra suscitò il riso degli spettatori."*

J. Baltrusaitis, Anamorfosi o magia artificiale degli effetti meravigliosi, Adelphi, Milano 1978.

Baltrusaitis riporta l'aneddoto come tratto da Niceron il quale a sua volta lo trasse da Plinio e Kircher da Tzetzze. Ancor prima, possiamo definire come trompe l'œil le piramidi egizie o i propilei del tempio di Horus a Edfu ed anche gli zigurat assiro-babilonesi, oltre alle ormai molto note correzioni ottiche applicate all'architettura greca.

Si veda, a titolo di esempio:

E.H. Gombrich, Illusioni e paradossi del vedere, in A cavallo di un manico di scopa, Einaudi, Milano 1971.

G. Fano, Correzioni ed illusioni ottiche in architettura, Dedalo, Bari 1979.

M. Luckiesh, Visual illusions. Their causes, characteristics & applications, Dover, London 1922.

G. Ciucci, Rappresentazione dello spazio e spazio della rappresentazione, in Rassegna N. 9, Marzo 1982.

In questa trattazione, e nel programma che ne è la naturale estensione, considereremo esclusivamente prospettive a centro di proiezione unico, che del resto costituiscono il *corpus* di gran lunga più ampio ed interessante.

Inoltre ci limiteremo ai casi nei quali siano presenti corpi architettonici o comunque solidi regolari e ben individuabili spazialmente.

Definiamo anche come **modello reale** l'insieme dei punti che individuano i vertici dei solidi rappresentati nella prospettiva: può quindi essere visto in pianta o in alzato o in qualsiasi altra forma rappresentativa voluta.

Costituisce, in sostanza, il modello utilizzato dall'artista per produrre la prospettiva ed è, per definizione, conosciuto topologicamente ma sconosciuto o meglio non perfettamente individuato nei valori delle coordinate: sarà compito del programma definirlo spazialmente in tutte le sue articolazioni e verificare che la topologia presunta sia corretta.

Per **modello prospettico** intenderemo, al contrario, l'insieme dei punti del modello reale messi in prospettiva dal programma EUCLID, utilizzando il punto di osservazione scelto dal programma stesso o dall'utente: tale modello deve, in linea teorica, coincidere con la **prospettiva data**: con questo nome chiameremo infatti l'insieme dei punti (omologhi a quelli del modello reale e prospettico) digitalizzati sulla prospettiva o ricavati in qualsiasi altro modo.

Infine definiremo come **insieme delle regole** una serie di caratteristiche, precisate meglio più avanti, proprie dei solidi che si intende restituire: la congruenza, la perpendicolarità tra due segmenti, la verticalità o il parallelismo tra segmenti ed altre ancora.

La restituzione prospettica

Generalmente la restituzione della forma e delle dimensioni reali di uno o più oggetti rappresentati in prospettiva, viene intesa come l'operazione inversa della prospettiva stessa: un metodo che permette di ricavare, fatte alcune supposizioni sulla forma reale di un oggetto, gli elementi dell'orientamento interno ed esterno della prospettiva. Tali parametri si applicheranno anche a tutti gli altri oggetti rappresentati.³

È ovvio che tale metodo può essere applicato con successo se gli oggetti raffigurati sono ben individuabili e riconoscibili: solidi geometrici quali cubi, sfere, piramidi, cilindri, prismi, oppure colonne, scale, archi, trabeazioni o anche semplici figure piane: quadrati, cerchi, rettangoli.

Può accadere però che la restituzione, imperniata sulle presunte caratteristiche di un oggetto, non si attagli bene al resto della scena rappresentata, ad altri solidi dislocati in posizioni diverse: sarà pertanto necessario riformulare nuove idee, ripetere il procedimento di restituzione e controllo fino a quando tutti gli oggetti risulteranno verosimili.

Vale a dire che il metodo restitutivo classico, basandosi su supposizioni spesso non dimostrabili a priori, diventa, da esatto, quasi sempre ricorsivo: una sorta di partita a scacchi, nella quale ogni mossa comporta una serie di conseguenze a cascata, non tutte preventivabili con sicurezza.

Inoltre la restituzione grafica manuale mediante stecca e compasso comporta inevitabili, pur se modesti, errori e disomogeneità e risulta in ogni caso riservata ad esperti studiosi della prospettiva.

Per finire, il ricercatore si trova a volte a dover restituire scene messe in prospettiva non classica (*legittima*), ma ad esempio proiettate su volte o cupole, oppure prospettive sferiche o cilindriche o anamorfotiche o addirittura *solide*: in questi casi i problemi si complicano ulteriormente, rendendo veramente ardua la soluzione con metodi tradizionali. Il metodo proposto, prescindendo dalla tecnica utilizzata per la costruzione della prospettiva, risulta applicabile virtualmente in tutti i casi, anche i più complessi e di più difficile soluzione.

3 È noto che possedendo, non una ma almeno due prospettive (fotografie) di un oggetto, prese da posizioni diverse, è possibile la restituzione fotogrammetrica esatta di ogni elemento presente in almeno due fotogrammi, a patto che siano noti i parametri di orientamento interno ed esterno di questi ultimi.

Più precisamente, l'orientamento interno è definito da:

- la lunghezza focale dell'obiettivo (la distanza del centro ottico dal quadro);
- le coordinate bidimensionali (sulla lastra) della proiezione del centro ottico sul quadro.

I parametri dell'orientamento esterno sono:

- le coordinate tridimensionali del punto di osservazione (centro ottico o proiettivo);
- gli angoli formati dall'asse ottico (la perpendicolare al quadro per il centro ottico), con i piani XY, XZ, YZ;
- l'inclinazione del quadro rispetto al piano XY (geometricale).

Nel caso in cui una tecnica non sia contemplata dal programma è sempre possibile aggiungere, senza incidere nel corpo del programma, una funzione in grado di simulare matematicamente il metodo prospettico usato dall'artista.

Le tecniche prospettiche

Come si è già accennato, esistono molte, al limite infinite, tecniche per porre in prospettiva un insieme di punti.

È possibile però distinguere almeno quattro categorie principali:

A) Prospettiva centrale su superficie piana a quadro piano. Fanno parte di questa categoria sia gli infiniti esempi di pittura dal Rinascimento in poi, sia le anamorfosi piane (come ad esempio il teschio negli Ambasciatori di Holbein), ed in genere tutte le prospettive, sia a quadro verticale sia inclinato, quindi anche le fotografie a lastra piana ed eseguite con obiettivo a bassa distorsione.

La loro restituzione prospettica è quasi sempre relativamente agevole; ciò non toglie che il programma possa essere utilizzato come ulteriore e semplice verifica della restituzione effettuata con metodi tradizionali.⁴

B) Prospettiva centrale su superficie non piana. È questo il caso di scene proiettate su semi sfere (cupole) o semi cilindri (volte a botte) o altre superfici non piane (volte a crociera, cupole paraboloidi o ellissoidi). In questo caso la scena, messa in prospettiva tradizionale su di un cartone piano, è stata proiettata da un punto, generalmente non al centro della sfera o sull'asse del cilindro, sulla cupola o volta o sulla superficie: solo un osservatore posto in quel punto percepirà una vista corretta in tutte le sue parti. Da qualsiasi altro punto gli oggetti rappresentati appariranno via via più deformi ed assurdi quanto più l'occhio sarà distante dal corretto centro di proiezione e di vista.

Si sono individuati tre sotto-casi:

B.1) Cupole a tutto sesto (semi sfere).

B.2) Volte a botte a tutto sesto (semi cilindri).

B.3) Superfici qualsiasi e non meglio definibili matematicamente, quali vele, ventagli, cupole ellissoidi o iperboloidi, piani raccordati, intersezioni di più superfici, etc.

Le coordinate che individuano sia il modello prospettico sia la prospettiva data sono necessariamente riferite a punti posti nello spazio; ne consegue che per effettuare la restituzione prospettica è essenziale avvalersi di un rilievo topografico o fotogrammetrico delle superfici dipinte, anche se nei primi due casi è teoricamente possibile costruire la prospettiva data, a patto di conoscere il raggio della sfera o del cilindro, contro-proiettando sulla superficie curva i punti digitalizzati da fotografie nadirali.

Anche conoscendo approssimativamente il centro di proiezione è però estremamente difficoltoso restituire graficamente tale prospettiva, data la complessità di intersecare rette generiche con cilindri o sfere.

Inoltre, il quadro prospettico piano potrebbe non essere complanare con l'imposta della cupola, ma opportunamente inclinato per impedire che l'osservatore debba voltare all'insù la testa di un angolo retto.⁵

C) Prospettiva su superficie piana a quadro non piano. Le proiettanti vengono intercettate da una superficie non piana (quadro principale), ed i punti così definiti successivamente contro-proiettati o sviluppati su piano (quadro secondario). Tra le infinite superfici utilizzabili si sono selezionate:

C.1) La sfera con centro di proiezione coincidente con il punto di vista.

C.2) Il cilindro verticale con l'occhio appartenente all'asse.

C.3) Il cilindro orizzontale, anche questo con la mira sull'asse.

C.4) Il doppio cilindro: è questa la probabile costruzione proposta da Erwin Panofsky per alcuni encausti pompeiani.⁶

4 Esistono in commercio numerosi programmi che permettono la restituzione prospettica, per piani, a partire da un'unica fotografia.

Condizione necessaria e sufficiente per la restituzione è che siano conosciute le coordinate di almeno quattro punti, non allineati, per ogni piano di restituzione. L'autore ha prodotto un programma, denominato *PhotoCAD* (1991), in grado di effettuare anche una eventuale compensazione dei parametri di restituzione, nel caso siano noti più di quattro punti. Tale programma, interfacciato anch'esso con *AutoCAD*, è utilizzabile da computer aventi le stesse caratteristiche necessarie per il programma *EUCLID*.

Al riguardo, si veda anche:

R. Greene, Determining the preferred viewpoint in linear perspective, in *Leonardo*, vol. XVI, 2, Pergamon Press, Marzo 1983.

5 R. Masiero; F. Prampolini; C. Trevisan, Rilievo fotogrammetrico ed elaborazione numerica della volta del coro, in Il Palazzo dell'Università di Genova, Università degli Studi di Genova, Genova 1987.

Viene qui presentata la restituzione del punto di vista preferenziale degli affreschi sulla volta del coro di Palazzo Balbi, a Genova. Tali studi hanno messo in luce la probabile esistenza di tre differenti punti di vista e di altrettanti quadri prospettici principali, tutti inclinati rispetto all'orizzontale.

È da notare che attualmente la vista della volta è occlusa da un solaio all'altezza dell'imposta: l'unico modo per ricostruire la visione corretta degli affreschi era dunque di virtualizzare (utilizzando le risorse della computer grafica) l'intero impianto prospettico.

Si veda anche:

R. Masiero; F. Prampolini; C. Trevisan, Algoritmi per lo studio della prospettiva curva: rilievo architettonico e computer graphics, in *Computer graphics e CAD per l'architettura e il territorio*, Jackson, Milano 1988.

6 Il programma *Euclid* è stato inizialmente ideato e sviluppato proprio per la restituzione di encausti pompeiani del secondo stile, nell'ambito di una ricerca, condotta in collaborazione con il prof. Massimo Scolari, dal titolo:

La rappresentazione dell'architettura dal Mondo Antico al Rinascimento.

Si veda anche:

E. Panofsky, La prospettiva come forma simbolica e altri scritti, Feltrinelli, Milano 1961.

D. Gioseffi, *Perspectiva artificialis*, *Quaderno N° 7 dell'Istituto di Storia dell'Arte Antica e Moderna*, Trieste 1957.

I due cilindri, a raggio uguale, perpendicolari tra loro, incontrano i propri assi in un punto, centro di proiezione e di vista: il primo cilindro, verticale, permette di individuare, per ogni punto da mettere in prospettiva, la coordinata in pianta; l'altro, orizzontale, l'altezza.

La maggiore complessità di restituzione consiste, anche in questo caso, essenzialmente nella ricerca del raggio della sfera o del cilindro e nel dover trovare le intersezioni tra i raggi ottici e la stessa sfera o cilindro.

D) Prospettive solide o in rilievo. Con questi termini si intendono architetture o scenografie deliberatamente costruite come *trompe*, per dare all'osservatore l'impressione di vedere solidi di forme e dimensioni diverse da quelle reali.

Sono assimilabili a questa categoria, ad esempio, il falso coro di S. Maria in S. Satiro a Milano, la galleria borrominiana di Palazzo Spada o la scala Regia in Vaticano o ancora quella del Codussi alla Scuola di S. Giovanni Evangelista, a Venezia; per le scenografie quella, per tutte, del teatro Olimpico di Vicenza. In tutti questi casi, ed in molti altri simili a questi, esiste un punto di osservazione privilegiato che permette, con le modalità vinciane di utilizzare un solo occhio e fermo, di *vedere* un'architettura non distorta o assurda, diversa (e spesso molto diversa) da quella reale.⁷

Compito della restituzione in questo frangente non è certo quello di trovare un modello reale, in effetti esistente e misurabile, ma, considerando questo come prospettiva data, trovare un altro modello, più *realistico* del modello reale, dotato di quei canoni e proporzioni tra le sue membrature, assenti nel modello che, ancorché reale, chiameremo *autentico*.

Tutti questi metodi del mettere in prospettiva gli oggetti, nell'ovvio caso in cui siano ben eseguiti, possiedono una caratteristica in comune: dal corretto punto di osservazione (quello scelto dall'artista), e solo da questo, mostrano oggetti corretti (anch'essi definiti dall'artista) in modo corretto.

In altre parole potendo fare delle supposizioni, non solo metriche ma anche e soprattutto relazionali, sugli oggetti rappresentati e sul punto di osservazione, è possibile se non altro capire se la loro messa in prospettiva è corretta o meno: non ricostruendo ma costruendo la prospettiva e confrontandola poi con l'originale e verificando contemporaneamente tutte le supposizioni fatte circa tutti gli oggetti presi in considerazione.

Tale procedimento pseudo empirico di *supposizione della realtà-calcolo della prospettiva-confronto con l'originale*, evidentemente non può essere eseguito con metodi grafici manuali, già di per sé lunghi e approssimativi.

In questo caso l'uso dell'elaboratore elettronico garantisce sia la velocità che la precisione e risulta in grado di operare indifferentemente con tutti i tipi di prospettiva proprio perché ne utilizza la caratteristica comune appena considerata. È da notare come non venga imposto un modello rigido e già completamente predefinito nelle sue dimensioni, ma al contrario un modello che si può definire plastico, deformabile in tutte le sue parti purché siano mantenute valide le regole volute: regole che possono a loro volta essere più o meno restrittive, dare maggiore libertà di movimento in alcune direzioni o limitarle in altre.

Il punto di forza del metodo consiste proprio nella possibilità offerta dall'elaboratore di produrre e verificare, rapidamente e con diligenza, un enorme numero di configurazioni, senza pregiudizi o inevitabili imprecisioni dovute ad una verifica grafica manuale.

È però chiaro che l'imposizione di regole contraddittorie o anche semplicemente non vere può portare alla definizione di un modello reale che poco ha a che fare con quello veramente utilizzato o perfino a nessuna soluzione valida. Il momento più delicato, ma anche più interessante e creativo, dell'intero *iter* di restituzione è quindi quello della definizione delle norme cui dovranno sottoporsi gli oggetti rappresentati in prospettiva.

⁷ È stata anche eseguita la restituzione prospettica dello scalone codussiano; ricerca dalla quale è emerso, tra l'altro, che, se vista dal basso, la scalinata appare profonda circa la metà del reale e, viceversa, se vista dall'alto, quasi il doppio del reale.

Si veda anche, ad esempio:

E. Robbiani, La verifica costruttiva del finto coro di Santa Maria presso San Satiro a Milano, in *La Prospettiva Rinascimentale Codificazioni e trasgressioni*, Centro DI, Firenze 1980.

Le regole compositive

Al fine di permettere la costruzione di un insieme di regole consistente⁸, congruente ed univoco, sono state individuate le seguenti classi:

- **Distanze imposte.** Ad esempio l'altezza di una colonna. Questa regola serve essenzialmente per imporre un fattore di scala all'intero modello ricostruttivo tridimensionale: tutte le altre coordinate e misure si correleranno automaticamente con queste.

È sufficiente, anzi spesso è consigliabile, imporre una sola distanza, purché altre regole facciano riferimento ai due punti interessati.

L'insieme di regole deve infatti risultare concatenato, connesso e non contraddittorio: l'*optimum* si ottiene quando, modificando una sola coordinata del modello reale, tutte o quasi tutte le regole vengono interessate, anche indirettamente, ed i relativi valori modificati. Da quanto detto risulta pertanto assiomatica l'assegnazione della misura prefissata al segmento che unisce la coppia di punti che compaiono nel maggior numero di regole.

- **Gruppi di segmenti imposti uguali tra loro.** In questo caso non si impone un valore prefissato ma si obbliga il modello reale ad una verifica relativa: ad esempio tutte le colonne di un peristilio, nella realtà saranno uguali tra loro in altezza anche se non è possibile stabilire a priori l'esatta misura dell'altezza.

Questa regola risulta particolarmente potente proprio perché nelle architetture rappresentate sussistono moltissimi elementi di uguali dimensioni: ma l'utilizzo può anche estendersi, ad esempio, per la verifica che una data figura geometrica sia un triangolo equilatero, un quadrato, un cerchio, passando per tutti i poligoni regolari intermedi.

- **Gruppi di segmenti aventi, tra loro, un rapporto imposto.** Seguendo l'esempio precedente, è possibile supporre che una colonna abbia un determinato rapporto tra base ed altezza e intercolunnio: è possibile imporre che, sempre nella realtà, i segmenti che rappresentano queste entità stiano tra di loro nel rapporto voluto anche senza conoscere o voler imporre una altezza ed una base prefissate. La regola permette di costruire un modello reale che sia architettonicamente coerente e spazialmente logico: ad esempio per una verifica di un ordine o del rapporto aureo tra le misure di una stanza.

- **Gruppi di segmenti aventi, tra loro, lo stesso rapporto.** In questo caso non si vuole nemmeno imporre un rapporto predefinito ma si stabilisce senz'altro che quei segmenti abbiano lo stesso rapporto, qualsiasi esso sia.

In questo caso la regola risulta più blanda della precedente ma comunque utile: ad esempio per imporre che le colonne appartenenti a differenti colonnati (e quindi diverse tra loro per altezza), formino con le rispettive basi il medesimo rapporto.

- **Segmenti imposti come verticali oppure orizzontali.** In questo caso si prescinde dalla lunghezza dei segmenti: l'unica cosa che conta è l'essere verticale od orizzontale, nient'altro. È evidente che questa sarà una delle regole più utilizzate essendo molto comuni, nell'architettura, le strutture di questo tipo.

- **Angoli imposti tra due segmenti.** Due segmenti, che abbiano un punto in comune, dovranno formare nel modello reale un angolo nello spazio pari a quello imposto: ad esempio l'angolo tra una colonna e la sua trabeazione sarà di norma retto, indipendentemente dalle lunghezze dei segmenti, dal loro rapporto ed anche dal loro essere verticale ed orizzontale.

- **Gruppi di segmenti formanti lo stesso angolo.** In questo caso non si conosce a priori l'angolo formato da alcune coppie di segmenti, ma si impone che gli angoli stessi siano uguali tra loro.

- **Gruppi di punti imposti in allineamento.** Dati due punti nello spazio ed un insieme di altri punti intermedi, la regola impone che questi ultimi appartengano alla retta passante per i primi due. Ad esempio i vertici superiori o inferiori dei segmenti che rappresentano una infilata di colonne.

⁸ È stato messo a punto un linguaggio per la costruzione dell'insieme di regole ed un motore in grado di classificarle e metterle in relazione. Ad esempio, "congelando" alcuni punti del modello reale è possibile attivare solo le regole strettamente attinenti ai punti mobili oppure anche quelle che contengono almeno un riferimento ad un punto mobile. In tal modo è possibile svincolare del tutto una parte del modello reale e farne proseguire le modifiche indipendentemente dal resto, oppure vincolare la parte mobile a quella congelata.

Anche questa regola è suscettibile di un uso molto vasto, concatenata quasi sempre con altre regole per limitare o indirizzare i movimenti di alcuni solidi del modello reale.

Nel caso di prospettive proiettate su superfici curve, la regola permette di rettificare, nella realtà, segmenti che nella prospettiva appaiono curvi.

- **Gruppi di punti imposti complanari.** Dati tre punti che definiscono un piano comunque disposto nello spazio ed un insieme di altri punti, la regola verifica che questi appartengano al piano stesso.

È questo il caso di tutte le finestre di una facciata o i basamenti di due o più file di colonne: l'unica avvertenza, ovvia, è che i tre punti che definiscono il piano non siano allineati.

- **Gruppi di quattro punti che definiscono un rettangolo orizzontale.** Anche in questo caso aggiungendo altre regole si riesce a definire l'ambito di modificazione voluto: fissando uno dei quattro vertici, ad esempio, il rettangolo sarà libero di ruotare attorno a questo.

- **Gruppi di punti imposti come appartenenti ad un piano qualsiasi,** fissato dai coefficienti A, B, C, D dell'equazione generica del piano $Ax+By+Cz+D=0$. In questo caso è possibile definire un piano fisso nello spazio e non più variabile in funzione dei tre punti che lo identificano. L'utilità risulta evidente nel caso si voglia, ad esempio, imporre che alcuni oggetti stiano necessariamente appoggiati sul piano del pavimento.⁹

- **Gruppi di segmenti che formano con un piano angoli dati.** Identificato un piano per mezzo di tre punti, i segmenti definiti da coppie di punti dovranno formare con il piano angoli dati. È questo il caso di tetraedri o piramidi note, o supposte tali, i cui spigoli formino angoli noti con il piano orizzontale definito dai punti di base.

- **Gruppi di segmenti che formano con un piano dato angoli uguali.** In questo caso non è conosciuto l'angolo ma la semplice informazione che i segmenti formano, con il piano, angoli uguali tra loro.

- **Gruppi di piani che formano con un piano dato angoli dati.** Qui tre punti definiscono un piano e triplette di altri punti definiscono altrettanti piani che formeranno con il primo angoli definiti dall'utente.

- **Gruppi di piani che formano con un piano angoli uguali.** Anche qui, pur non essendo conosciuto l'angolo, è nota l'informazione che le coppie di piani individuano un angolo uguale, qualsiasi esso sia.

- **Gruppi di otto punti che individuano un prisma regolare retto,** a base rettangolare orizzontale. Volendo meglio definire spazialmente il solido è possibile ricorrere ad altre regole concatenate: ad esempio per imporre che sia un cubo è sufficiente aggiungere la regola che i dodici lati siano tra loro uguali.

- **Gruppi di punti che definiscono un elemento spaziale o piano,** in grado di deformarsi mantenendo intatte alcune caratteristiche geometriche.

Tali elementi potranno variare secondo le seguenti modalità:

- traslazioni in X, Y, Z (tx, ty, tz);

- scalature in X, Y, Z (sx, sy, sz);

- rotazione attorno ad un asse verticale passante per il primo punto dell'elemento.

La definizione di elementi congruenti permette un notevole risparmio di tempo e altrettanta icasticità nella composizione della scena reale, sia perché le variabili si riducono drasticamente, sia perché la configurazione così individuata mantiene verificate, automaticamente ed implicitamente, un certo numero di regole.

Se infatti, ad esempio, si identificano otto punti in un elemento, le variabili scendono da 24 (8 [punti] * 3 [coordinate]) a sole sette ($tx, ty, tz, sx, sy, sz, rotz$).

Inoltre, segmenti verticali ed orizzontali, angoli retti e punti complanari rimangono tali nelle trasformazioni.

In sostanza, se gli otto punti definiscono inizialmente un cubo, questo potrà traslare

⁹ Si danno qui i coefficienti dell'equazione del piano $AX+BY+CZ+D=0$, per alcuni casi particolari. I trattini indicano la possibilità di sostituire parametri generici: così, ad esempio, il piano $3X+5=0$ sarà parallelo al piano YZ, così come $8X-7=0$.

A B C D tipo di piano

0 0 1 0 piano XY

0 1 0 0 piano XZ

1 0 0 0 piano YZ

- - - 0 per l'origine

- - 0 - perpendicolare al piano XY

- 0 - - perpendicolare al piano XZ

0 - - - perpendicolare al piano YZ

0 0 - - parallelo al piano XY ($Z=-D/C$)

0 - 0 - parallelo al piano XZ ($Y=-D/B$)

- 0 0 - parallelo al piano YZ ($X=-D/A$)

0 - - 0 contenente l'asse X

- 0 - 0 contenente l'asse Y

- - 0 0 contenente l'asse Z

nello spazio cartesiano, modificarsi fino a divenire un prisma e ruotare attorno ad un asse verticale, ma non potrà mai deformarsi fino ad assumere la forma di un tronco di piramide o di un solido irregolare.

Ciò non toglie che segmenti aventi un estremo appartenente ad un elemento e l'altro estremo libero (o facente parte di un altro elemento), possano variare liberamente e passare da orizzontali a inclinati o viceversa.

Questa definizione è pertanto utile se - e solo se - l'elemento così individuato mantiene inalterate le sue caratteristiche essenziali pur potendo assumere posizioni e scalature diverse da quelle iniziali.

Ad ogni regola è possibile associare un relativo **peso** che definisce l'importanza della regola stessa nell'economia di tutto l'insieme.

Può infatti succedere, nello svolgersi della ricerca, di rendersi conto che una regola sia più di danno che di beneficio, oppure che aumentando il peso di una regola rispetto alle altre si costringano alcuni punti *ribelli* a trovare una loro corretta collocazione spaziale.

Inoltre, come si è già visto, ogni regola può essere **combinata** con altre: ad esempio per imporre che una data figura geometrica sia nella realtà un cerchio orizzontale basterà porre uguali tra loro le distanze di ogni punto della figura da un centro (anche non rappresentato in prospettiva) e porre i punti come complanari ed orizzontali.

Da quanto visto è evidente che alcune di queste regole sono ridondanti: ad esempio, se un segmento è imposto verticale ed un altro orizzontale è ovvio anche che l'angolo sotteso sarà retto. Si è scelto di proporre tutte, o quasi, le possibilità per dar modo di rendere più conciso e mirato l'insieme di regole associate ad un modello ricostruttivo.

In sostanza l'insieme delle regole descrive in modo esaustivo geometricamente e topologicamente gli oggetti rappresentati in prospettiva. Se le regole sono corrette, non contraddittorie ed in numero sufficiente per potersi collegare in un *continuum* complessivo, permetteranno di trovare un punto di proiezione ed un modello reale che, posto in prospettiva con il metodo prescelto, dia come risultato la prospettiva di partenza.

Lo svolgersi del programma

In dettaglio lo svolgersi delle azioni è il seguente:

- Si digitalizzano, dalla prospettiva, i punti significativi per il controllo di coerenza: spigoli di solidi geometrici riconoscibili, assi di colonne, ecc.

Si prendono in considerazione le coordinate dei punti: nel caso di prospettive piane una delle tre sarà pari a zero; se si tratta di proiezioni su volte o cupole le tre coordinate saranno tutte significative. In quest'ultimo caso sarà necessario conoscere anche le coordinate del centro della sfera (cupola) o l'asse del cilindro (volta) ed i relativi raggi.¹⁰

- Si definiscono le coordinate approssimate dei vertici che costituiscono gli oggetti (modello reale di partenza). Tali punti potranno avere un omologo nella prospettiva, ma anche essere svincolati da questa e addirittura non rappresentati: ad esempio di un cubo pieno risultano visibili al massimo sette degli otto vertici, ma può essere utile definire anche l'ottavo punto che, pur non potendo trovare un riscontro prospettico (essendo infatti inesistente), potrà tornare utile per la verifica, nella realtà tridimensionale, che il solido sia effettivamente un cubo.

Chiameremo questi punti, non presenti in prospettiva ma solo nel modello reale, **di servizio**, per distinguerli dai punti di controllo.

- Vengono anche definite le coordinate approssimate del centro di proiezione ed eventualmente il raggio della sfera o del cilindro, nel caso di prospettive sferiche o cilindriche.

¹⁰ Per convenzione, in EUCLID, nel caso di prospettive piane, queste si considerano appartenenti al piano XZ: il modello reale e il centro di proiezione si disporranno quindi in funzione di questa collocazione. Nel caso di prospettive tridimensionali queste potranno avere una collocazione spaziale generica, tenendo presente che il modello prospettico verrà rappresentato proiettato sul piano XZ.

- Infine si costruisce l'insieme di regole associate agli oggetti e agli eventuali elementi.¹¹

Una volta imposti o trovati questi valori, sarà possibile eseguire la prospettiva e trovare perciò un modello prospettico simile alla prospettiva di partenza: se si riuscirà a farlo coincidere con quest'ultimo e saranno verificate le regole, il modello reale sarà senz'altro simile (diverso per un fattore di scala) alla realtà utilizzata dall'artista. Per ottenere tale risultato si attiva un algoritmo pseudo-stocastico che consta delle seguenti fasi:

A) Le coordinate di partenza che definiscono il modello ricostruttivo tridimensionale vengono incrementate, indipendentemente le une dalle altre, delle quantità dx_i, dy_i, dz_i , con i variabile da 1 ad N (dove N rappresenta il numero di punti del modello reale, compresi i punti di servizio come ad esempio i centri dei cerchi o delle sfere o i punti che definiscono l'asse di un cilindro: punti che, pur non avendo un loro omologo nella prospettiva, sono comunque utili nella fase di controllo delle regole).

Nel caso siano presenti elementi spaziali congruenti, questi vengono deformati in funzione dei sette parametri $tx, ty, tz, sx, sy, sz, rotz$.

B) Vengono verificate tutte le regole alla luce dei cambiamenti apportati alle coordinate: viene trovato uno scarto quadratico medio che definisce lo scostamento tra il modello ideale, proposto dalle regole, e quello reale, trovato al punto **A**.

C) Il punto di osservazione ed eventualmente il centro della sfera o del cilindro e il suo raggio vengono incrementati anch'essi delle quantità dx, dy, dz, dr (evidentemente gli incrementi, come anche quelli del punto **A**, possono essere sia positivi che negativi).

D) Viene eseguita la trasformazione prospettica e viene trovato lo scarto tra ogni punto di controllo (esclusi i punti di servizio) del modello prospettico ottenuto e il suo omologo della prospettiva data. Anche in questo caso viene definito uno scarto quadratico medio che identifica, mediante un unico numero, la differenza esistente tra la prospettiva ottenuta e quella reale.

E) Viene iterato tutto il procedimento dal passo **A**, con opportuni algoritmi che controllano gli incrementi da apportare al fine di minimizzare gli scarti¹². Da notare che per ogni iterazione viene presa in considerazione, e conseguentemente variata, una sola variabile (sia una coordinata che un parametro di traslazione, scalatura o rotazione), e che vengono quindi ricalcolate solo le regole e le trasformazioni prospettiche che coinvolgono quel punto o quell'elemento.

Conclusioni

Il programma EUCLID è in grado di effettuare la restituzione prospettica per qualsiasi tipo di prospettiva a centro ottico unico, a quadro piano o curvo, proiettata su sfere o cilindri, solida o scenografica, purché contenente solidi o figure piane geometricamente riconoscibili.

Il metodo proposto è vicino a quello tradizionale: la differenza sostanziale consiste nel fatto che, mentre per via grafica si è costretti a definire fin dall'inizio gli elementi dell'orientamento interno ed esterno della prospettiva e restituirla in funzione di questi, nel nostro caso questi parametri rimangono variabili e vengono costantemente aggiornati affinché tutte le condizioni poste siano valide, compresa ovviamente la coincidenza della prospettiva data con quella prodotta.

In altre parole il programma si basa sulla continua verifica di leggi o regole compositive imposte ad un modello tridimensionale in costante deformazione. Se e quando tutte le norme sono rispettate (a meno di uno scarto quadratico medio accettabile per l'utente), il modello reale così trovato rappresenterà la restituzione della prospettiva data.

¹¹ Le regole vengono scritte su file mediante un comune text editor in grado di costruire file nel formato di testo ASCII. Le regole possono poi essere modificate all'interno del programma.

¹² L'algoritmo consiste nella ricerca della sella minima di una funzione, anche non lineare, a più variabili, variando con modalità pseudo casuali i coefficienti della funzione stessa. Il tempo richiesto per il raggiungimento del minimo è strettamente dipendente dalle condizioni di partenza, oltre che dal numero delle variabili. In questo caso le variabili sono correlate al numero dei punti (N) dalle regole: $N \cdot 3 + 3$, $N \cdot 3 + 4$, in funzione del tipo di prospettiva da restituire, oppure al numero di elementi dalla regola $E \cdot 7 + 3$ o $E \cdot 7 + 4$, dove E rappresenta il numero di elementi definiti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. Gioseffi, *Perspectiva artificialis*, Quaderno N° 7 dell'Istituto di Storia dell'Arte Antica e Moderna, Trieste 1957.
- [2] A.A. V.V., *Illusione e realtà. Problemi della percezione visiva*, Le Scienze, Milano 1978.
- [3] E.H. Gombrich, *Illusioni e paradossi del vedere da A cavallo di un manico di scopa*, Einaudi, Milano 1971.
- [4] M. Luckiesh, *Visual illusions. Their causes, characteristics & applications*, Dover, London 1922.
- [5] G. Fano, *Correzioni ed illusioni ottiche in architettura*, Dedalo, Bari 1979.
- [6] J. Baltrusaitis, *Anamorfoosi o magia artificiale degli effetti meravigliosi*, Adelphi, Milano 1978.
- [7] G. Fano, *La restituzione prospettica da prospettiva razionale*, Dedalo, Bari 1979.
- [8] C. Chiesa, *Prospettiva*, Hoepli, Milano 1975.
- [9] G. Ciucci, *Rappresentazione dello spazio e spazio della rappresentazione*, da Rassegna N. 9, Marzo 1982
- [10] R. Greene, *Determining the preferred viewpoint in linear perspective*, da Leonardo vol. XVI 2, Pergamon Press, Marzo 1983
- [11] R.V. Cole, *Perspective for artists, The practice & theory of perspective as applied to pictures with a section dealing with its applications to architecture*, Dover, London 1921.
- [12] R. Masiero - F. Prampolini - C. Trevisan, *Rilievo fotogrammetrico ed elaborazione numerica della volta del coro*, da *Il Palazzo dell'Università di Genova*, Università degli Studi di Genova, Genova 1987.
- [13] R. Masiero - F. Prampolini - C. Trevisan, *Algoritmi per lo studio della prospettiva curva: rilievo architettonico e computer graphics*, da *Computer graphics e CAD per l'architettura e il territorio*, Jackson, Milano 1988.
- [14] G. Loria, *Storia della geometria proiettiva dalle origini ai giorni nostri*, Milano 1932.
- [15] D. Gioseffi, voce *Prospettiva*, in *Enciclopedia Universale dell'Arte*, vol. XI.
- [16] E. Robbiani, *La verifica costruttiva del finto coro di Santa Maria presso San Satiro a Milano*, da *La Prospettiva Rinascimentale Codificazioni e trasgressioni*, Centro DI, Firenze 1980.