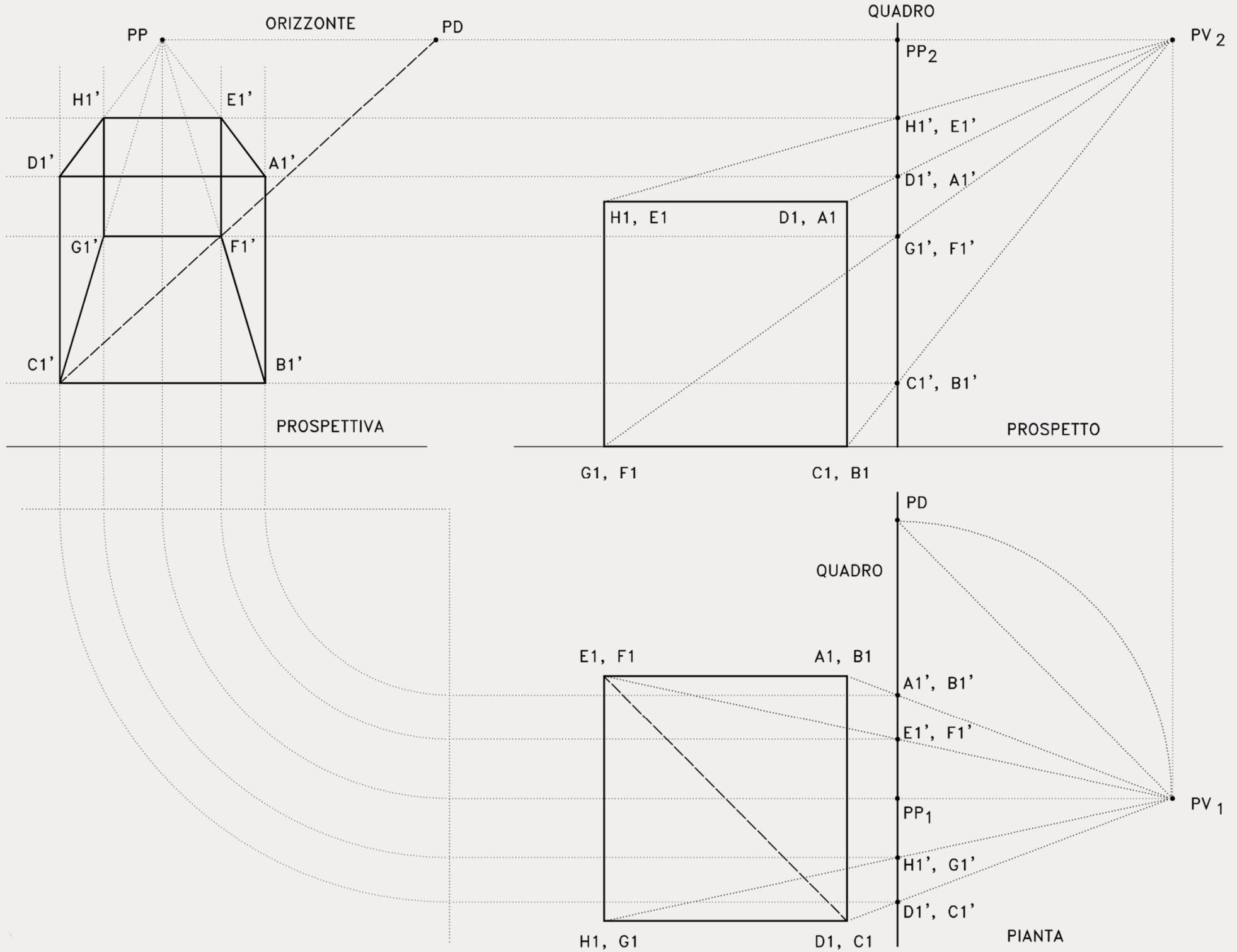


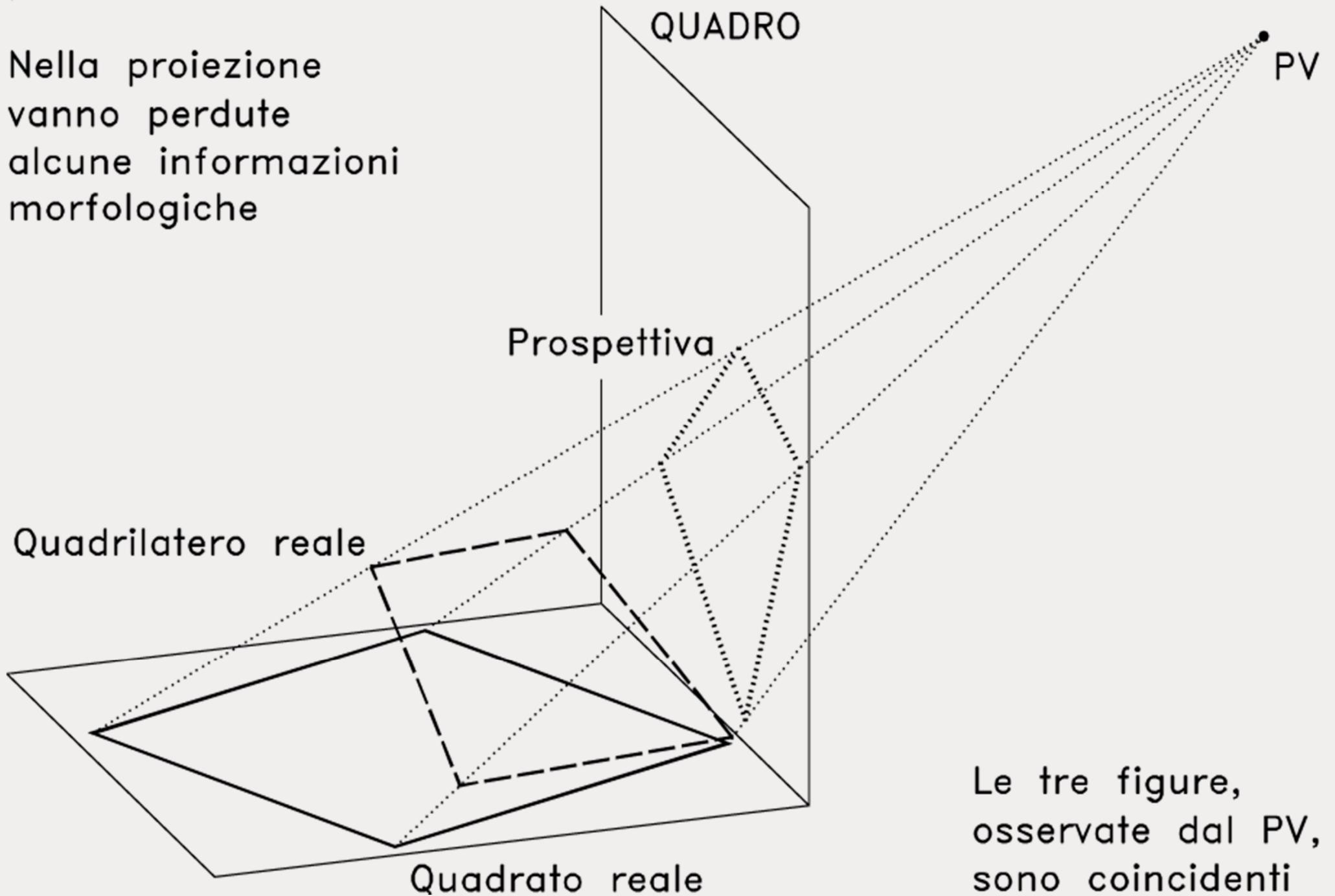
Proiezioni

IUAV – Laboratorio Multimedia

Camillo Trevisan



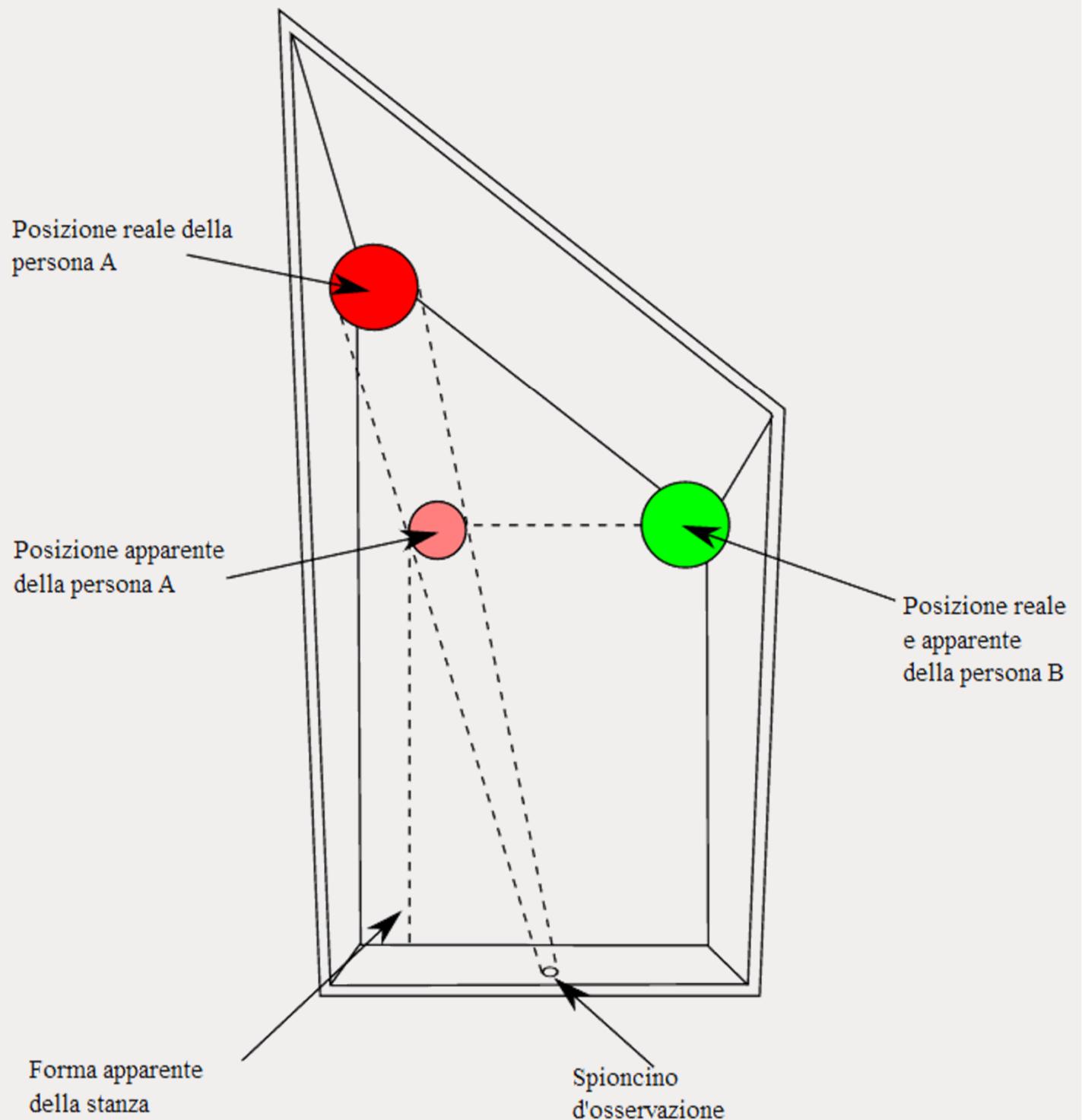
- Segmenti reali appartenenti al Quadro non sono scorciati in prospettiva;
- Segmenti paralleli al Quadro mantengono la loro giacitura nella proiezione;
- Segmenti tra loro paralleli nella realtà concorrono in prospettiva verso un unico Punto di Fuga, uno per ciascuna direzione nello spazio, esclusi i fasci di rette parallele al Quadro;
- Il Punto di Fuga di una retta (o meglio di un fascio di rette parallele e, pertanto, di una direzione) è dato dalla traccia sul Quadro della retta parallela alla direzione data e passante per il Centro di Proiezione (o Punto di Vista): così, ad esempio, il Punto di Fuga del fascio di rette orizzontali, parallele ad una diagonale del quadrato (per C_1E_1 , nella pianta) è dato dal punto PD (Punto di Distanza, poiché la distanza tra PD e PP_1 è congruente alla distanza tra quest'ultimo e PV_1), traccia sul Quadro della retta per PD e per PV_1 e parallela alla retta per C_1E_1 ;
- Seguendo quanto appena detto, il Punto Principale (proiezione del Punto di Vista, eseguita perpendicolarmente al Quadro) è anche il Punto di Fuga (in prospettiva) di tutte le rette perpendicolari al Quadro (parallele, dunque, alla retta per PV e PP);
- L'Orizzonte è il luogo dei Punti di Fuga degli infiniti fasci di rette orizzontali e non parallele al Quadro: poiché il Punto Principale è il Punto di Fuga di un fascio di rette orizzontali, ne segue che, definito il PP o qualsiasi altro Punto di Fuga di un fascio di rette orizzontali, è definito anche l'Orizzonte (e, dunque, l'altezza del Punto di Vista).

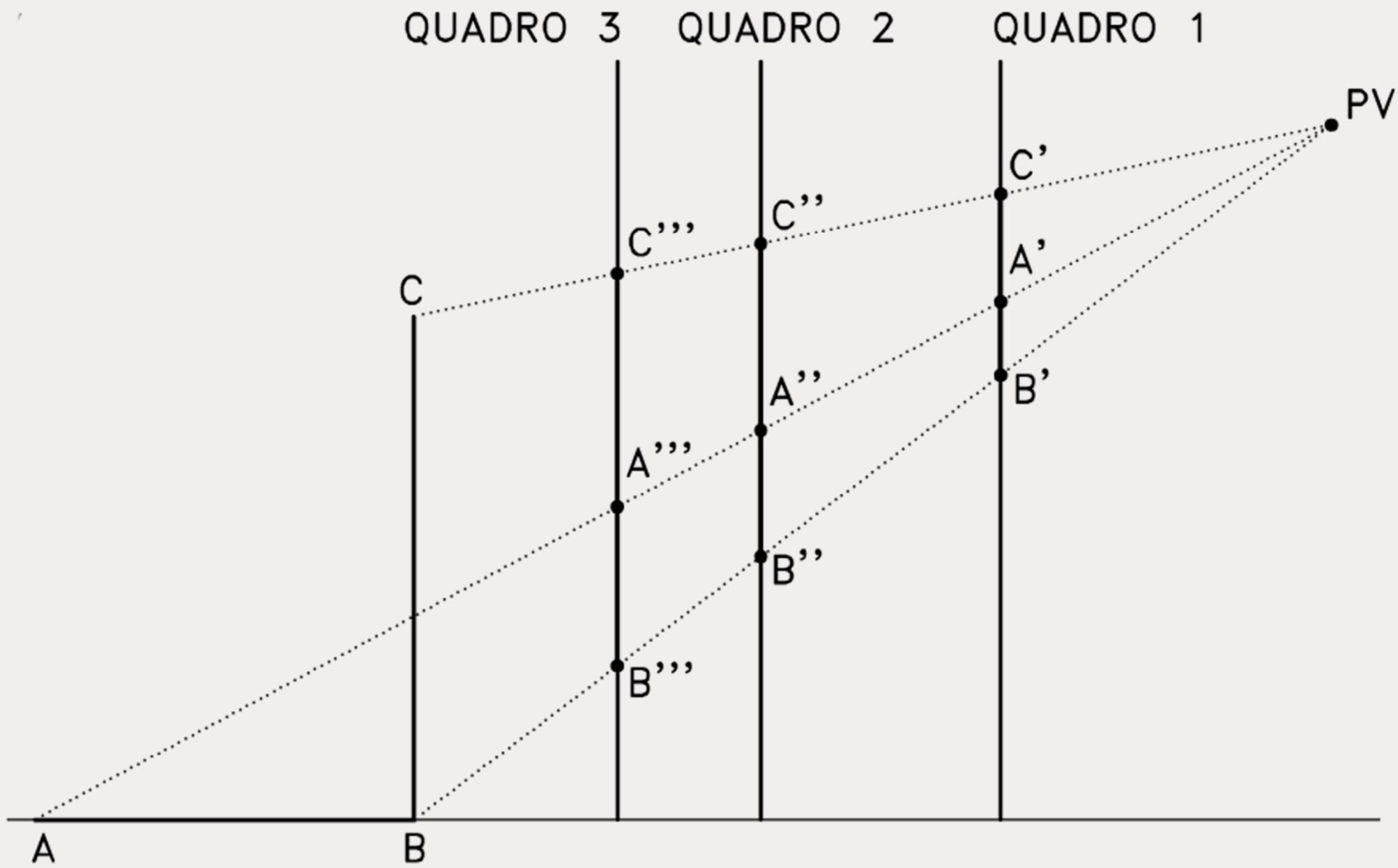


È noto che osservando una fotografia di un oggetto (o una prospettiva, poiché è lo stesso) non è generalmente possibile stabilire in modo univoco la forma di quest'ultimo: ad esempio un tronco di piramide può senz'altro costruire un'immagine prospettica identica a quella di un parallelepipedo. Vale a dire che, nel passaggio dalle tre dimensioni dello spazio reale alle due dimensioni della prospettiva piana, vanno inevitabilmente perdute alcune informazioni metriche e morfologiche. Ogni oggetto, fissato il centro di proiezione (PV) ed il piano di proiezione prospettica (Quadro), fornisce un'unica immagine su questo ma, viceversa, fissato ancora il PV, il Quadro e l'immagine prospettica, esistono infinite configurazioni tridimensionali alle quali questa può riferirsi. Tra queste potremo scegliere quella corretta solo possedendo alcune informazioni supplementari, che ci permettano di eliminare tutte le configurazioni errate mantenendo l'unica che verifica tutte le condizioni (sempre che una soluzione esista e sia unica).



La stanza di Ames è una camera dalla forma distorta in modo tale da creare un'illusione ottica di alterazione della prospettiva. È stata inventata dall'oftalmologo americano Adelbert Ames nel 1946 su un'idea di Hermann Helmholtz. La stanza è costruita in modo che vista frontalmente appaia come una normale stanza a forma di parallelepipedo, con due pareti laterali verticali parallele, una parete di fondo, un soffitto ed un pavimento paralleli all'orizzonte. In realtà la pianta della stanza ha forma di trapezio, le pareti sono divergenti ed il pavimento ed il soffitto sono inclinati. Le inclinazioni e le proporzioni nella dimensione degli elementi posti alle diverse profondità sono calcolate tenendo conto delle regole della prospettiva.





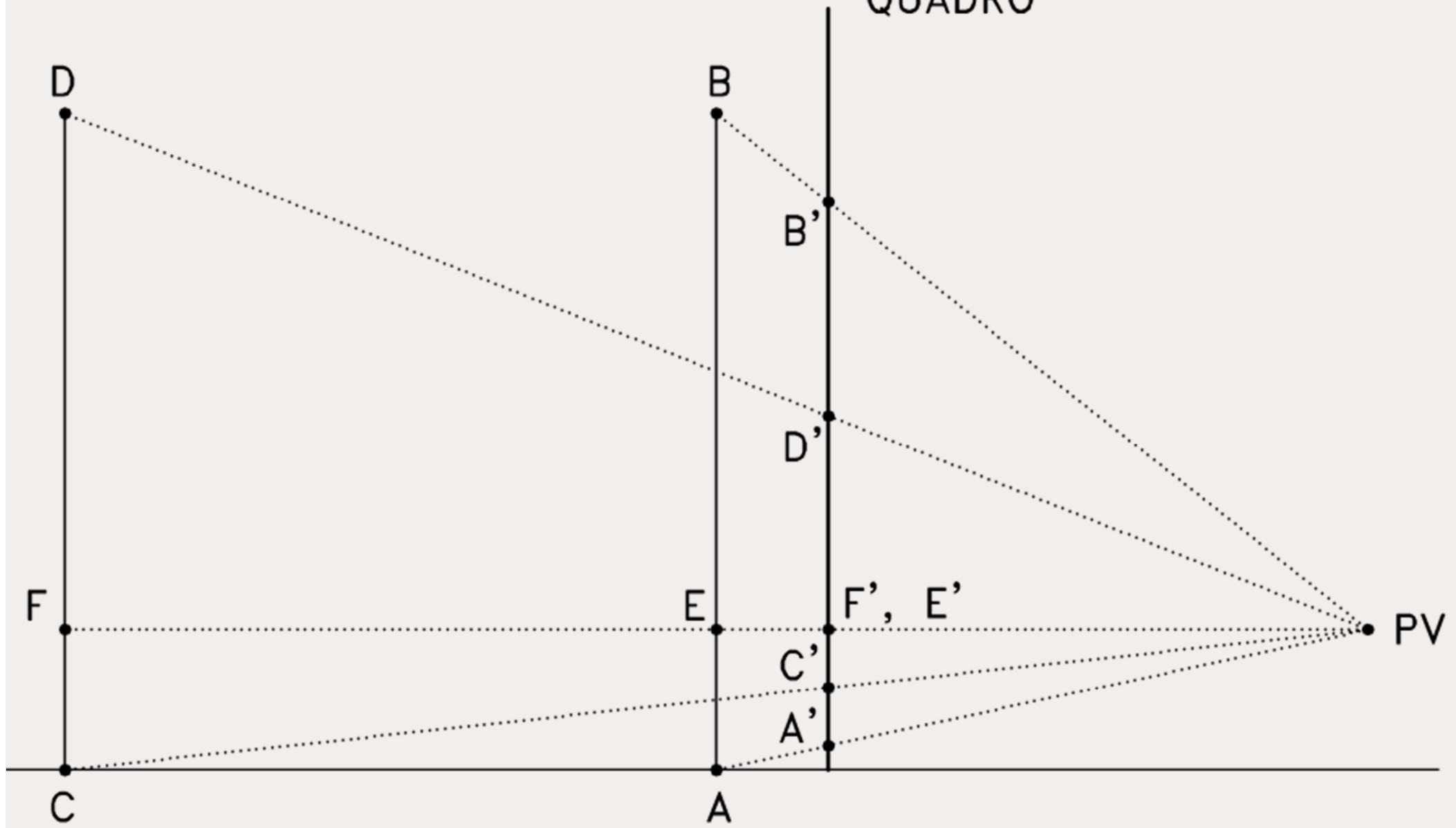
$$A'B' : B'C' = A''B'' : B''C'' = A'''B''' : B'''C'''$$

Il grafico illustra la proporzione esistente tra i segmenti reali proiettati su piani diversi, tra loro paralleli.

Questo comporta che, traslando il quadro parallelamente a se stesso (escludendo il caso del quadro contenente il Punto di Vista), l'immagine prospettica non cambia, a meno di un fattore di scala: non vengono però modificati i rapporti tra i segmenti proiettati, né l'angolo che essi formano tra loro sul quadro.

In una fotografia, dunque, mantenendo fisso il centro ottico dell'obiettivo e la direzione di ripresa, la prospettiva non è affatto modificata dal variare dell'obiettivo, sia esso un grandangolo o un teleobiettivo: cambia esclusivamente la porzione di spazio proiettato sul fotogramma.

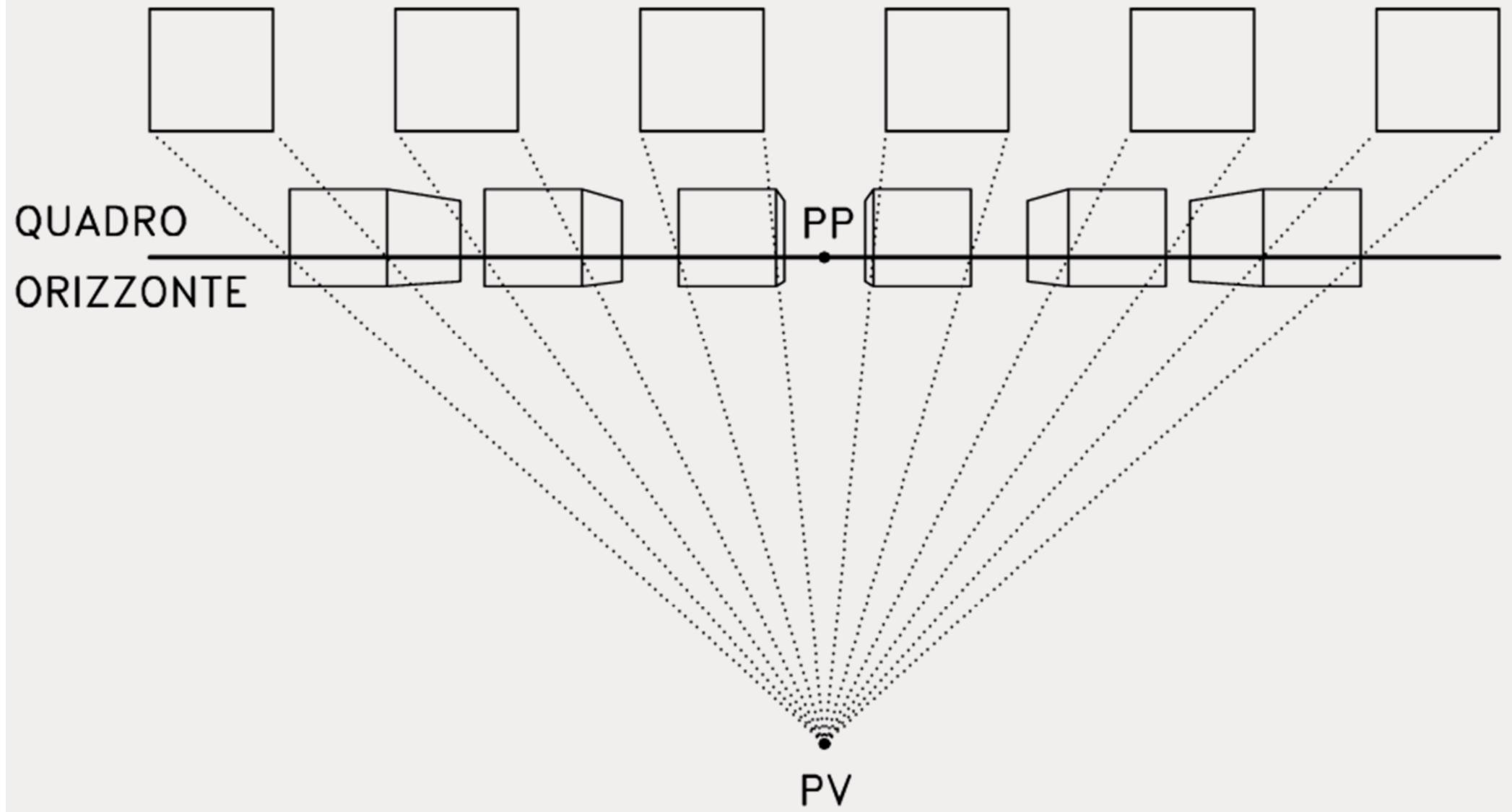
QUADRO



$$AB = CD$$

$$PV-E = EF = 2*PV-F$$

$$A'B' = 2*C'D'$$

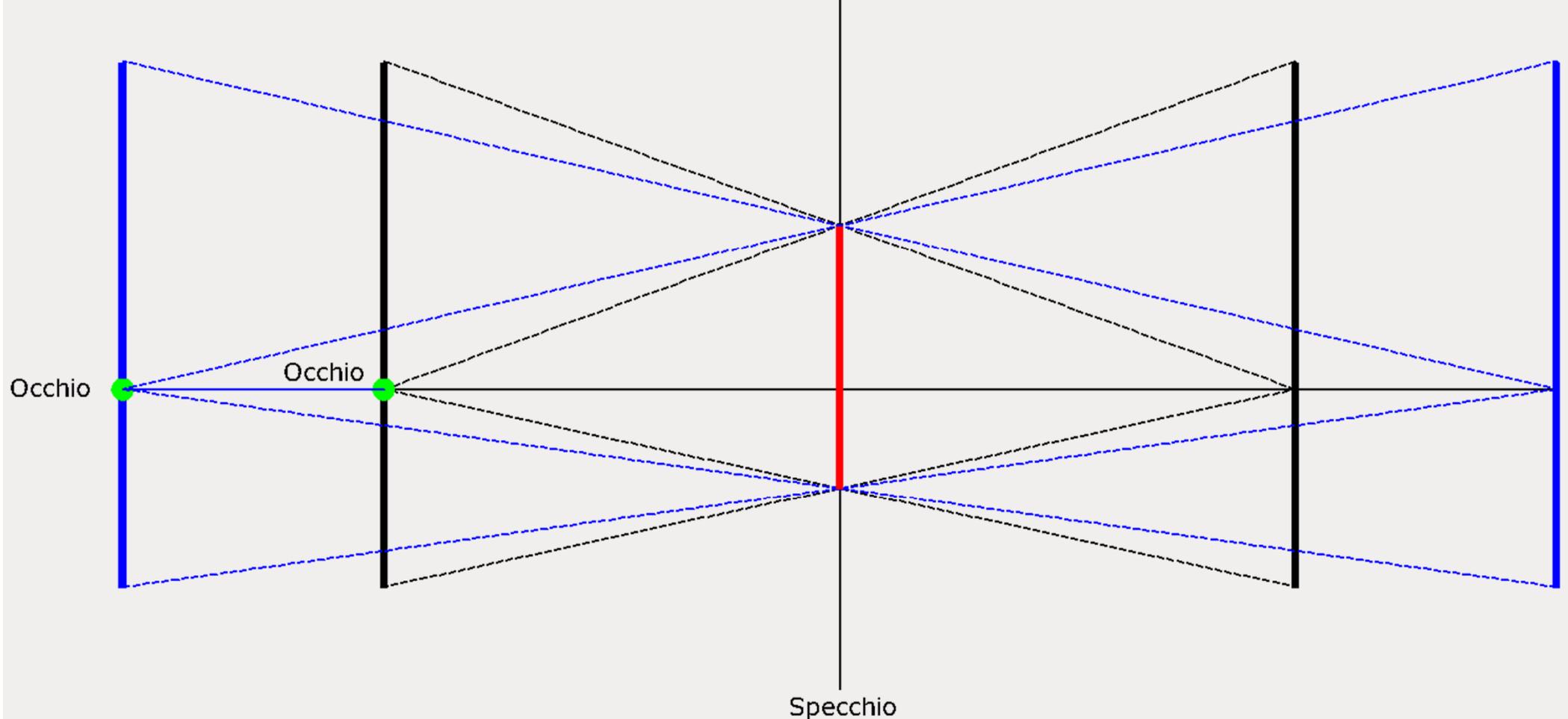


Il grafico **D** dimostra che lo scorciamento prospettico è in funzione inversa della distanza dell'oggetto dal PV.

I segmenti AB e CD sono infatti uguali tra loro. Poiché la distanza E-PV è la metà di F-PV, ne segue che C'D' è la metà di A'B', per qualunque posizione del Quadro.

Infine, il grafico **E** illustra un'altra caratteristica della prospettiva lineare. Gli oggetti (cubi tutti uguali tra loro) sono disposti alla stessa distanza dal Quadro.

La prospettiva mostra le loro facce frontali tutte uguali tra loro, anche per i cubi più distanti dal PV. Osservando la prospettiva dal giusto punto (posto sopra il Punto Principale, con distanza PP-PV), le facce più esterne saranno anche più lontane dall'occhio dell'osservatore e, dunque, saranno viste più piccole.

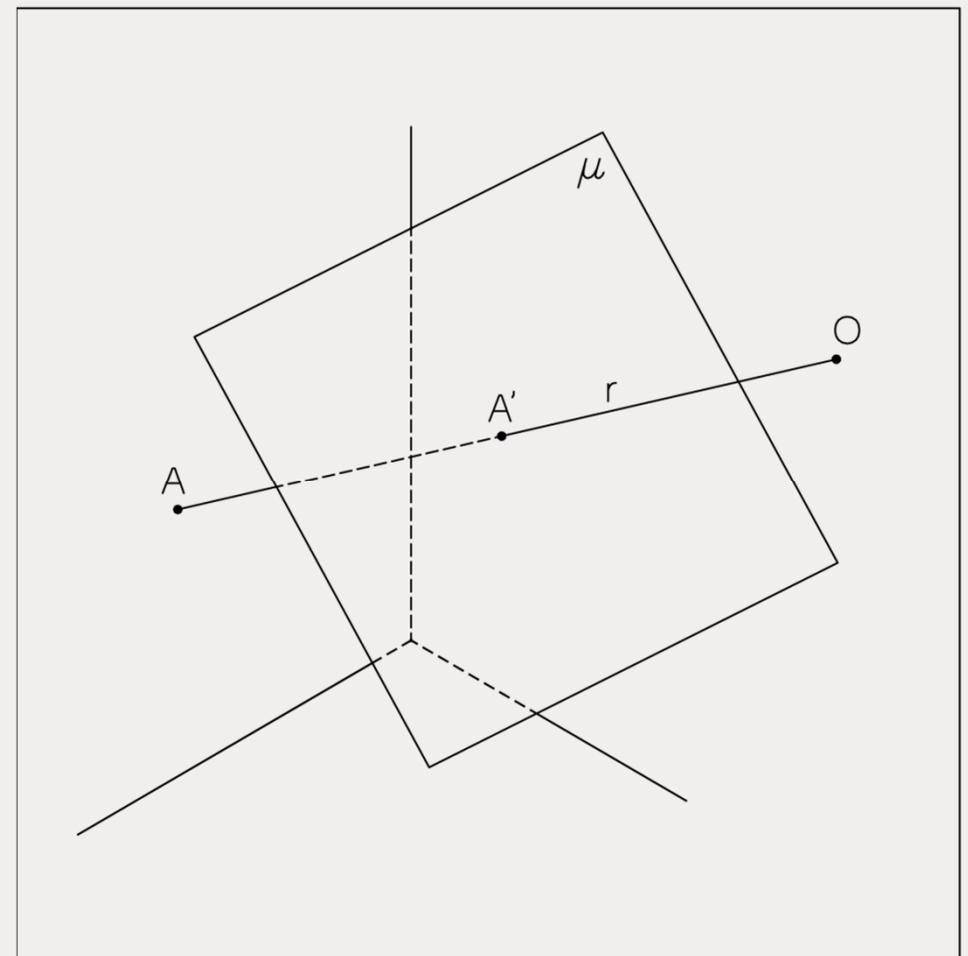


L'immagine riflessa di un segmento posto parallelamente a uno specchio, vista da un punto posto sul segmento stesso, è sempre della medesima lunghezza, qualunque sia la distanza del segmento dallo specchio ed è pari alla metà della lunghezza del segmento.

La **proiezione** e la **sezione** sono operazioni fondamentali della geometria proiettiva.

Definito un centro di proiezione **O** (spesso denominato anche **PV**), proiettare un punto **A** su di un piano μ (il piano di proiezione o Quadro), significa costruire la retta **r** passante per **O** e per **A** e intersecare (sezionare) il piano μ .

L'intersezione della retta **r** su μ identifica il punto **A'**, che è appunto la proiezione di **A** su μ .



Il punto **O** potrà trovarsi a distanza **finita** o **infinita** dal piano di proiezione e dagli oggetti proiettati: nel primo caso la proiezione sarà detta **conica** o **prospettica**, nel secondo **cilindrica**, ad indicare proiezioni **ortogonali** e **assonometriche**.

In quest'ultimo caso il punto **O** è detto punto improprio e indica la direzione della retta proiettante o direzione di proiezione.

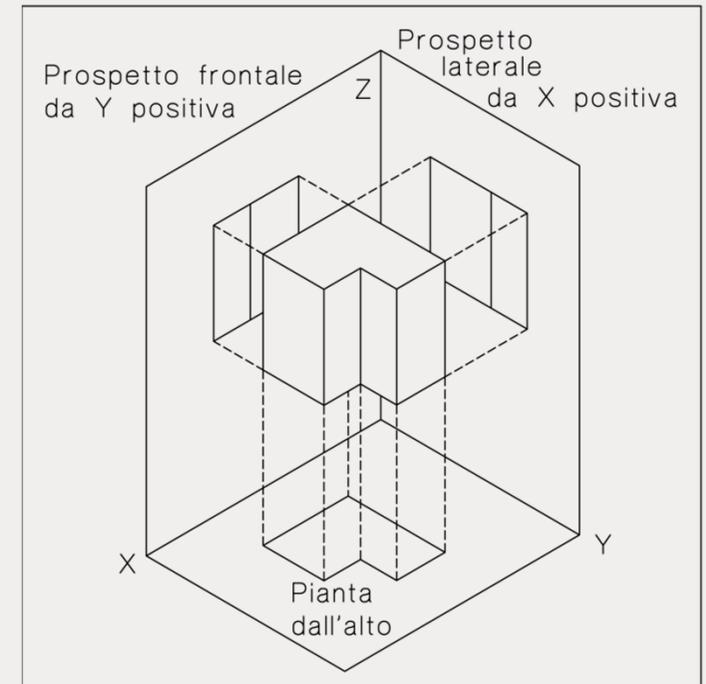
Le proiezioni coniche prendono il loro nome dal fatto che le rette proiettanti, tutte passanti per **O**, formano un fascio di rette non parallele tra loro, adombrando la configurazione delle rette generatrici di una superficie rigata conica.

Viceversa, nelle proiezioni cilindriche le rette proiettanti sono tutte parallele tra loro, come le generatrici di un cilindro, dato che il centro di proiezione è un punto improprio.

Le **proiezioni ortogonali** sono proiezioni cilindriche, vale a dire che il centro di proiezione è un punto improprio. Sono caratterizzate dalla giacitura del piano di proiezione parallela a uno dei tre piani cartesiani e dalla direzione di proiezione perpendicolare al Quadro e dunque parallela ad un asse cartesiano.

In una proiezione ortogonale le lunghezze poste parallelamente al piano di proiezione mantengono le loro estensioni originarie, mentre tutte le lunghezze poste parallelamente al terzo asse (quello parallelo alla direzione di proiezione) vengono ridotte ad un punto.

In ogni proiezione ortogonale sono dunque sempre visibili due dei tre assi (il terzo è ridotto ad un punto) e, sul piano di proiezione, l'angolo tra i due assi visibili è sempre pari a 90 gradi.

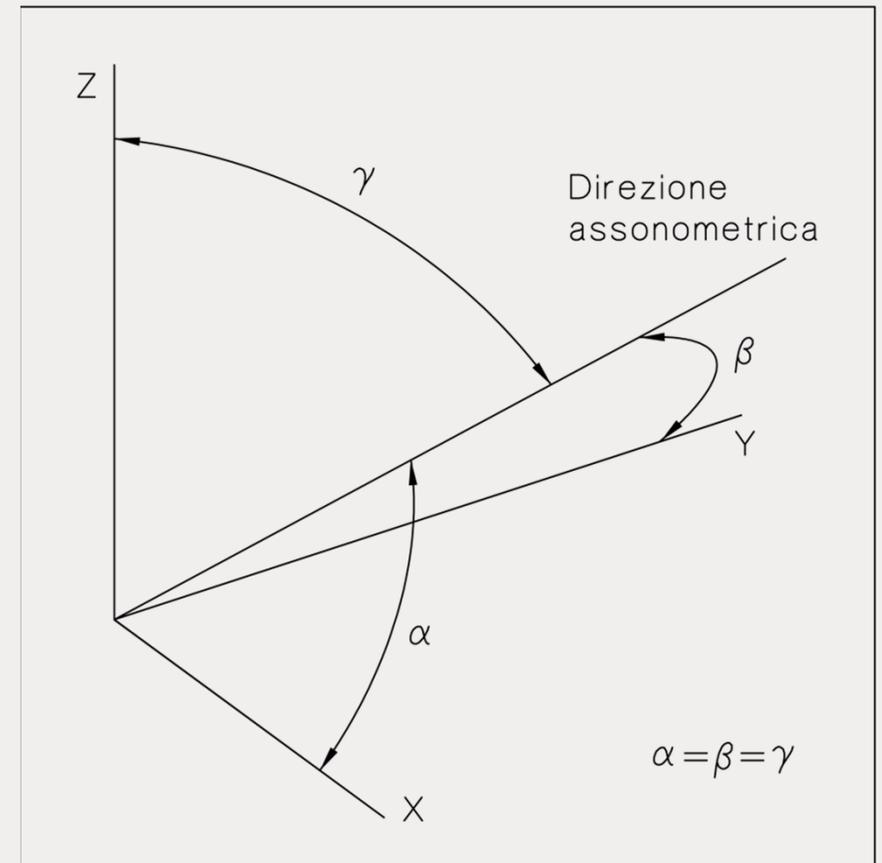


La configurazione spaziale di una **proiezione assonometrica ortogonale** è del tutto simile a quella di una proiezione ortogonale, con la differenza che la giacitura del piano di proiezione non è mai parallela ad uno dei tre piani cartesiani. Poiché il Quadro è inclinato rispetto agli assi cartesiani, questi verranno tutti proiettati sul piano stesso (non solo due come nel caso delle proiezioni ortogonali). Segmenti posti parallelamente agli assi cartesiani saranno sempre proiettati in segmenti più corti dei segmenti reali: i fattori di scorciamento sono pertanto sempre minori di 1. Inoltre gli assi proiettati sul piano formeranno tra loro angoli che non sono mai di 90 gradi.

Si tratta di una proiezione cilindrica con direzione di proiezione perpendicolare al piano di proiezione (da qui il nome *ortogonale*) che prevede tre tipi distinti:

1. Proiezione assonometrica ortogonale isometrica, quando il piano di proiezione forma con i tre piani cartesiani tre angoli uguali tra loro. In questo caso lunghezze uguali poste parallelamente ai tre assi cartesiani saranno proiettate sul quadro con scorciamenti uguali tra loro.

Gli angoli che i tre assi proiettati formano tra loro sul quadro sono tutti uguali e pari a 120 gradi. Vi sono otto possibili configurazioni proiettive: due per ogni quadrante, una per il verso positivo delle Z e una per quello negativo.

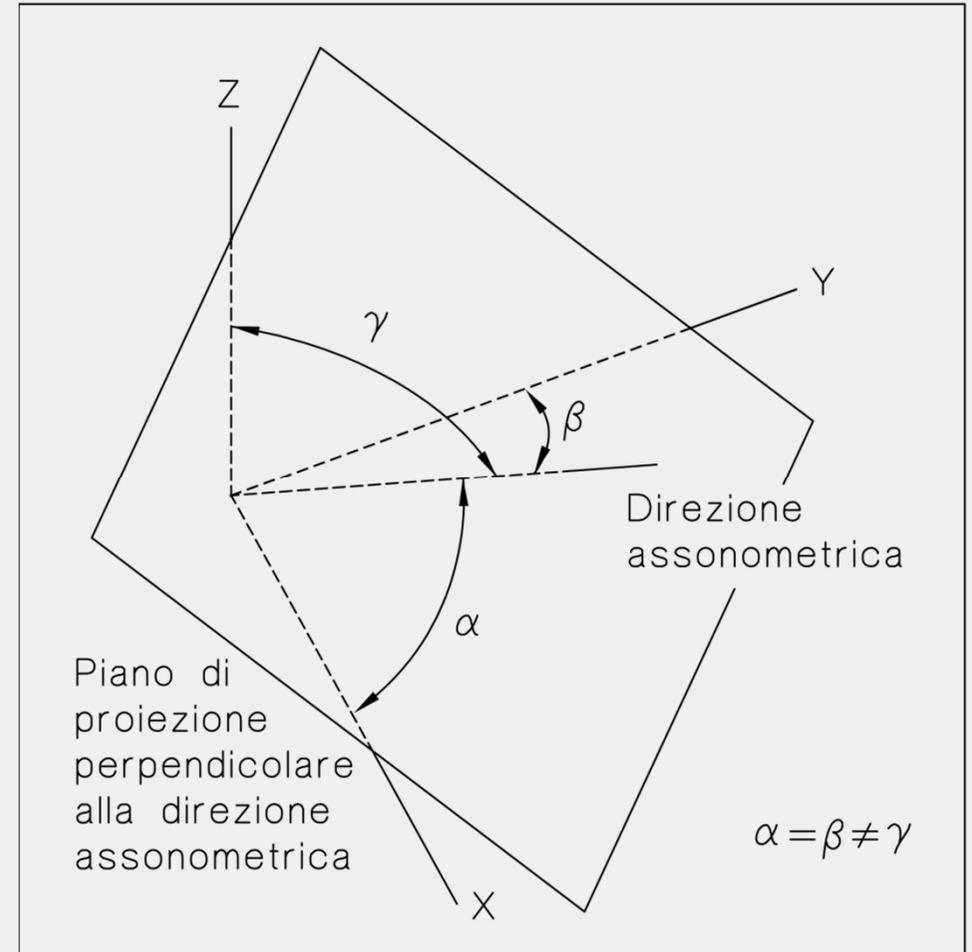


2. Proiezione assonometrica ortogonale dimetrica.

In questo caso il piano di proiezione forma con i piani cartesiani due angoli uguali tra loro ed un terzo diverso dagli altri due. Gli scorciamenti di lunghezze uguali poste lungo gli assi saranno dunque uguali tra loro solo per due assi.

Anche gli angoli che formano tra loro sul quadro gli assi proiettati saranno pertanto due uguali tra loro ed il terzo diverso dai primi due.

Esistono infinite configurazioni possibili di questo tipo di assonometria, ma solo alcune sono state codificate.

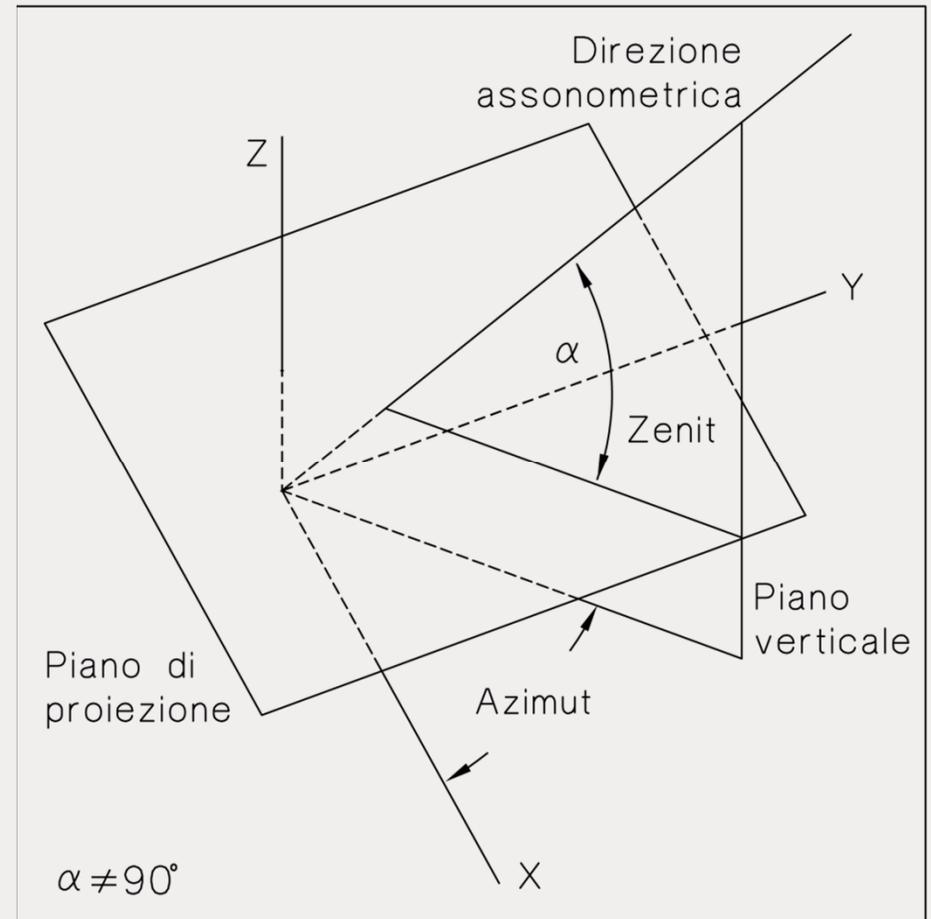


3. Nelle assonometrie ortogonali trimetriche il quadro forma con i tre piani cartesiani tre angoli diversi tra loro e dunque anche le lunghezze dei tre segmenti unitari posti lungo gli assi saranno, misurate sul Quadro, diverse tra loro e differenti saranno anche gli angoli tra gli assi proiettati, sempre misurati sul piano di proiezione.

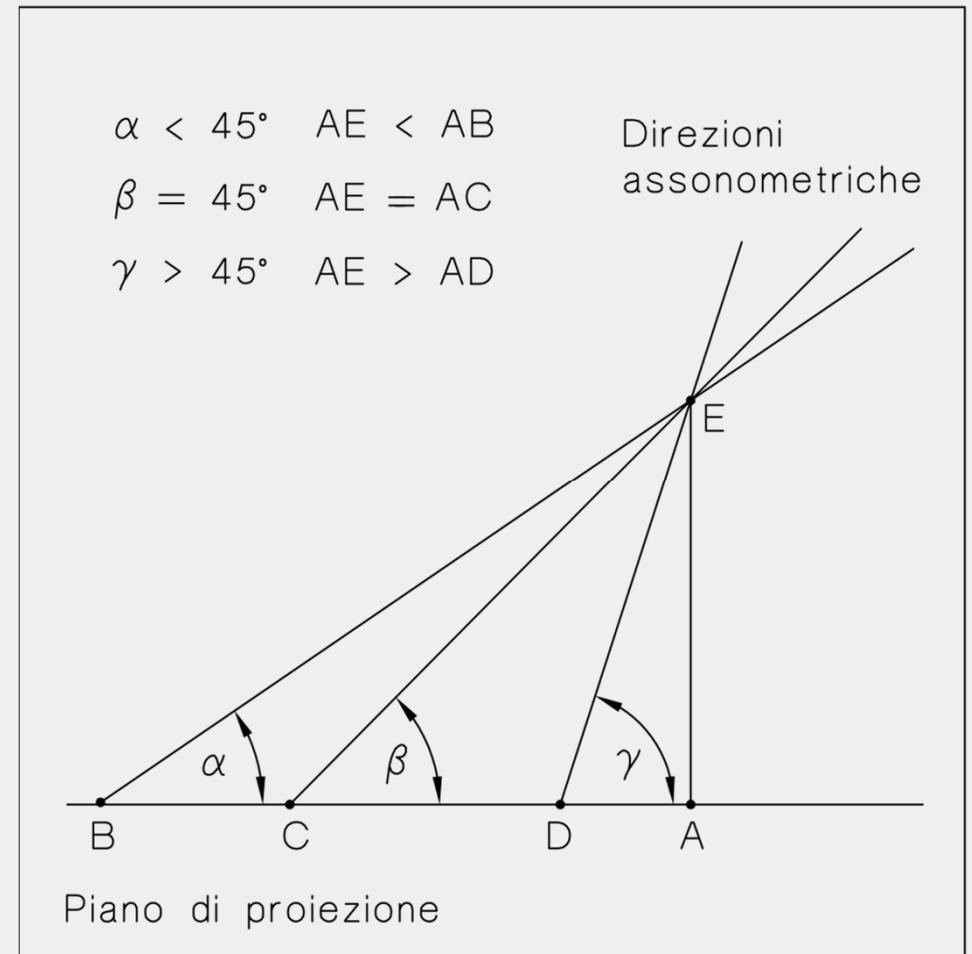
Alcuni esempi di assonometrie ortogonali trimetriche codificate:

- Angoli tra gli assi proiettati 130° , 120° , 110° .
Rapporti tra gli assi 1, 0.936, 0.814 (valori reali 0.889, 0.718, 0.833).
- Angoli tra gli assi proiettati 100° , 120° , 140° .
Rapporti tra gli assi 1, 0.938, 0.589 (valori reali 0.948, 0.889, 0.559).
- Rapporti tra gli assi 1, 0.6667, 0.75 (valori reali 0.998, 0.666, 0.749).
Angoli tra gli assi proiettati 93.8° , 93° , 173.2° .
- Rapporti tra gli assi 1, 0.7, 0.85 (valori reali 0.951, 0.666, 0.808).
Angoli tra gli assi proiettati 111.4° , 103.8° , 144.8° .
- Rapporti tra gli assi 1, 0.8, 0.9 (valori reali 0.904, 0.723, 0.813).
Angoli tra gli assi proiettati 117° , 109.8° , 133.2° .

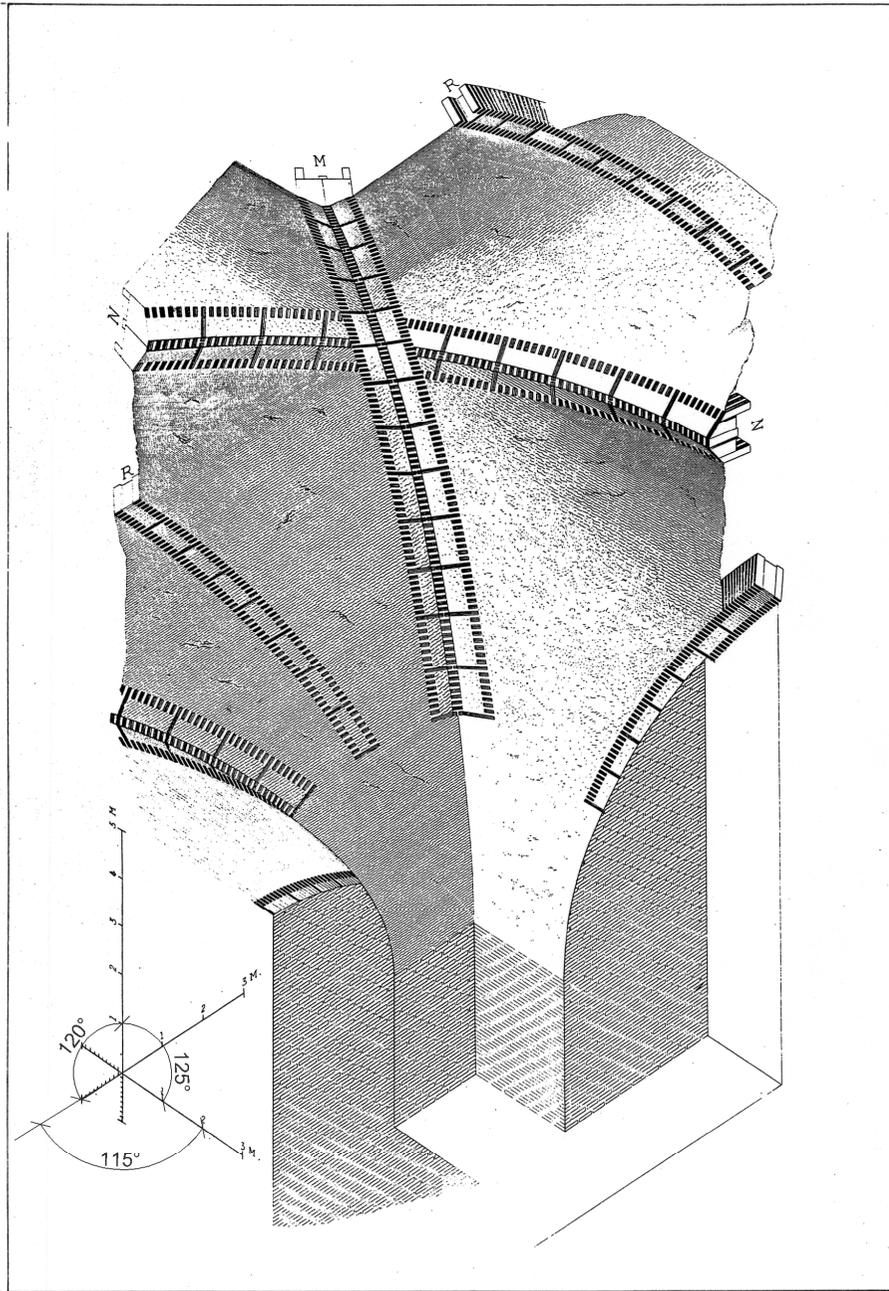
Per proiezione **assonometrica obliqua** si intende una proiezione cilindrica nella quale la direzione di proiezione è obliqua (non ortogonale) rispetto al Quadro. Delle infinite configurazioni vengono prese però in considerazione, di norma, solo quelle che presentano il piano di proiezione parallelo ad uno dei tre piani cartesiani. In tal modo, pur restando visibili nella proiezione tutti e tre gli assi, due di essi formeranno tra loro, sul Quadro, un angolo di 90° . Pertanto in una assonometria obliqua tutti i segmenti paralleli al piano cartesiano al quale è parallelo il Quadro non saranno scorciati nella proiezione.



L'assonometria obliqua militare prevede la giacitura orizzontale del piano di proiezione, mentre **l'assonometria obliqua cavaliere** è caratterizzata dal piano di proiezione verticale. Nelle assonometrie oblique **monometriche** l'asse recedente (perpendicolare al Quadro) non viene scorciato, mentre nelle oblique **dimetriche**, segmenti posti lungo l'asse recedente subiscono una riduzione o un allungamento. Il fattore di scorciamento (o di allungamento) può dunque variare tra 0 e $+\infty$ secondo che l'angolo tra la direzione assonometrica e il Quadro sia maggiore o minore di 45° . Quando l'angolo è pari a 45° il fattore è unitario e pertanto la proiezione sarà di tipo monometrico.



IX

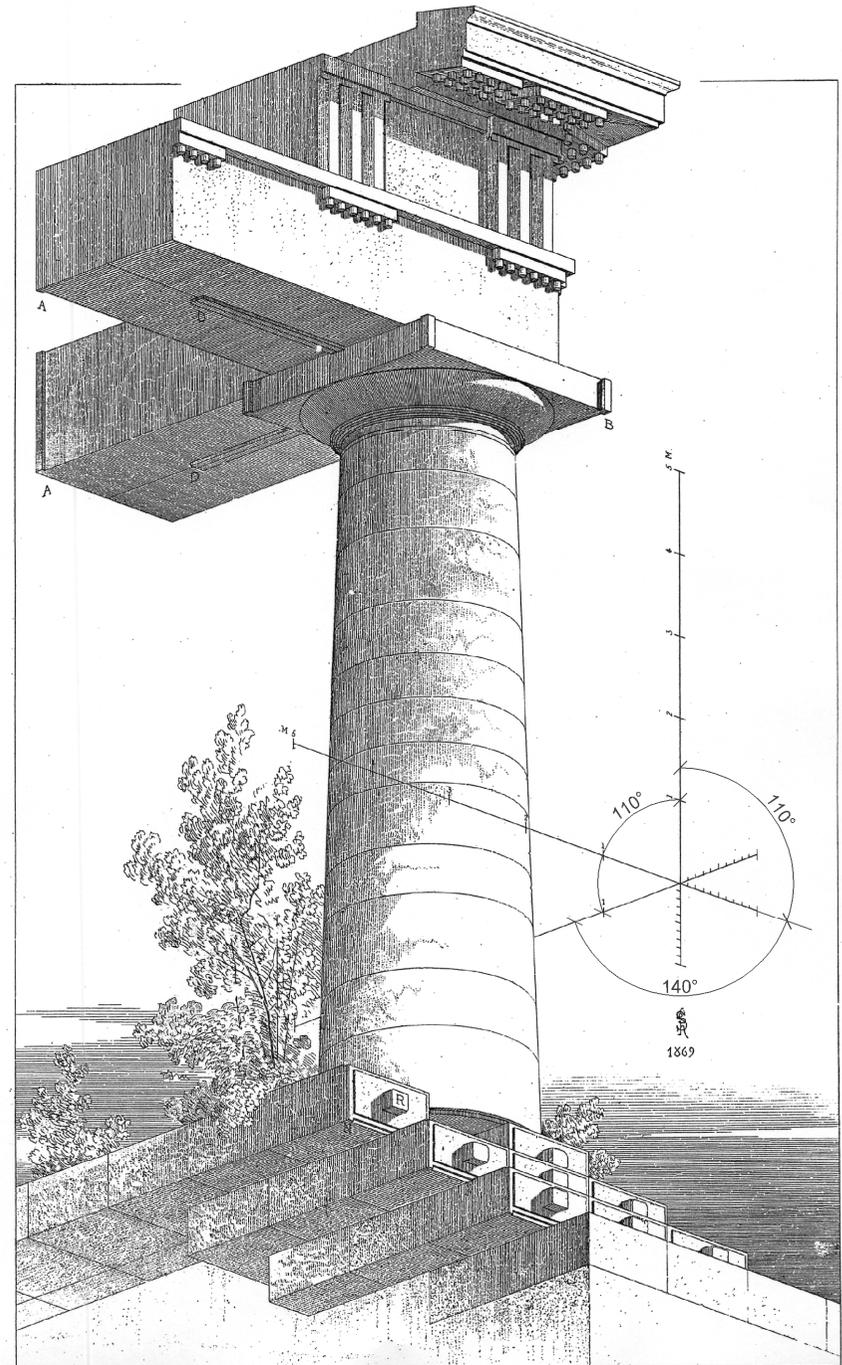


DESSINE PAR A. CHOISY

GRAVE PAR L. BESSY

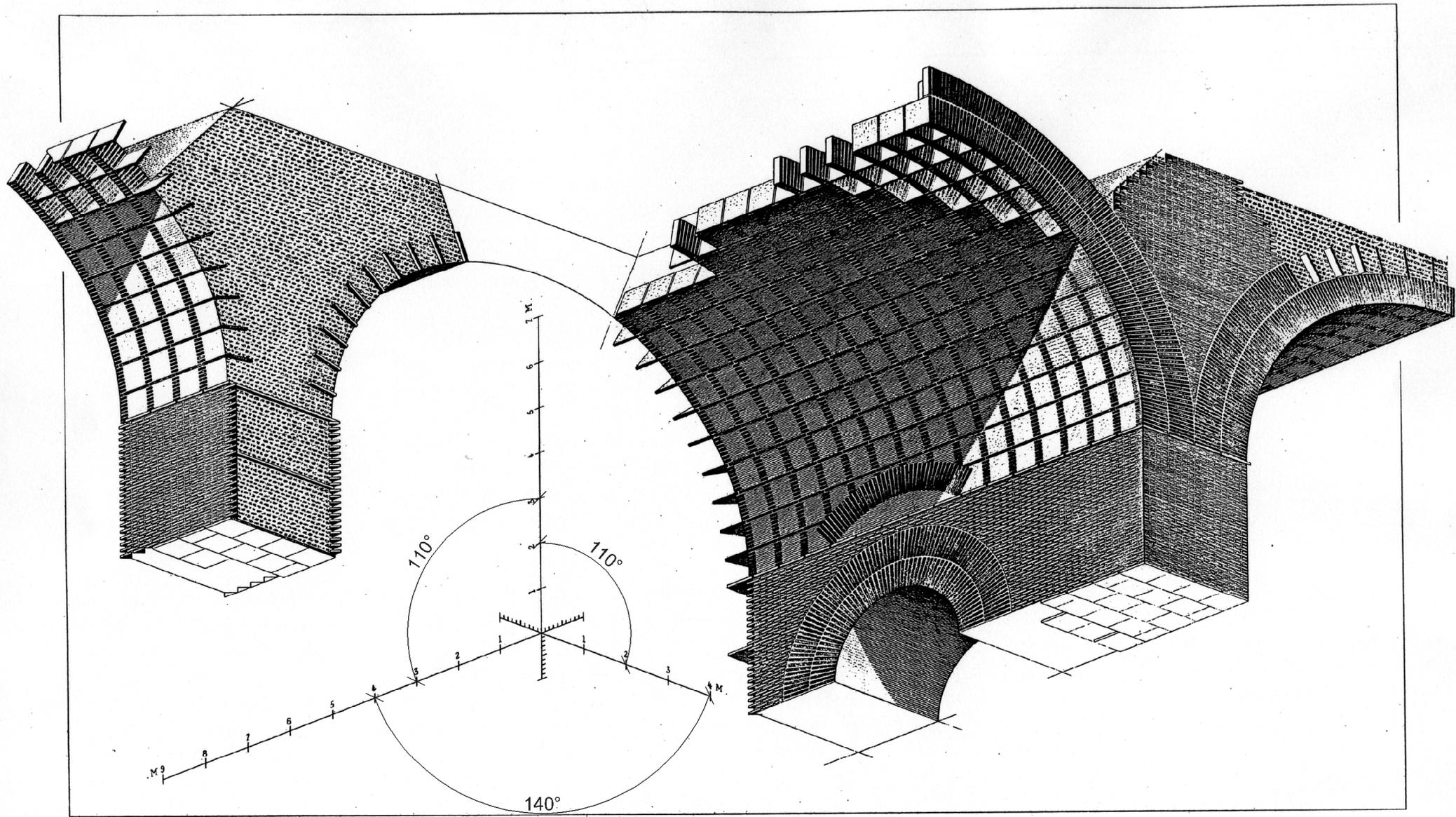
THERMES DE DIOCLETIEN

XXIII



DESSINE PAR A. CHOISY

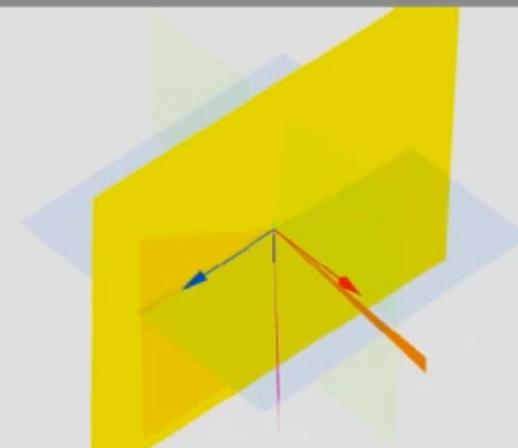
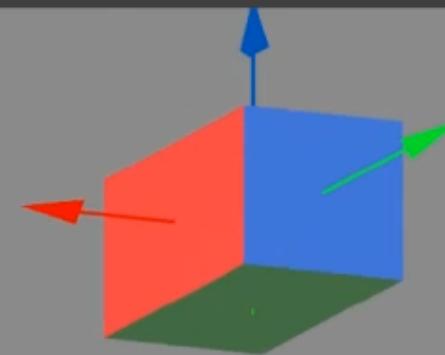
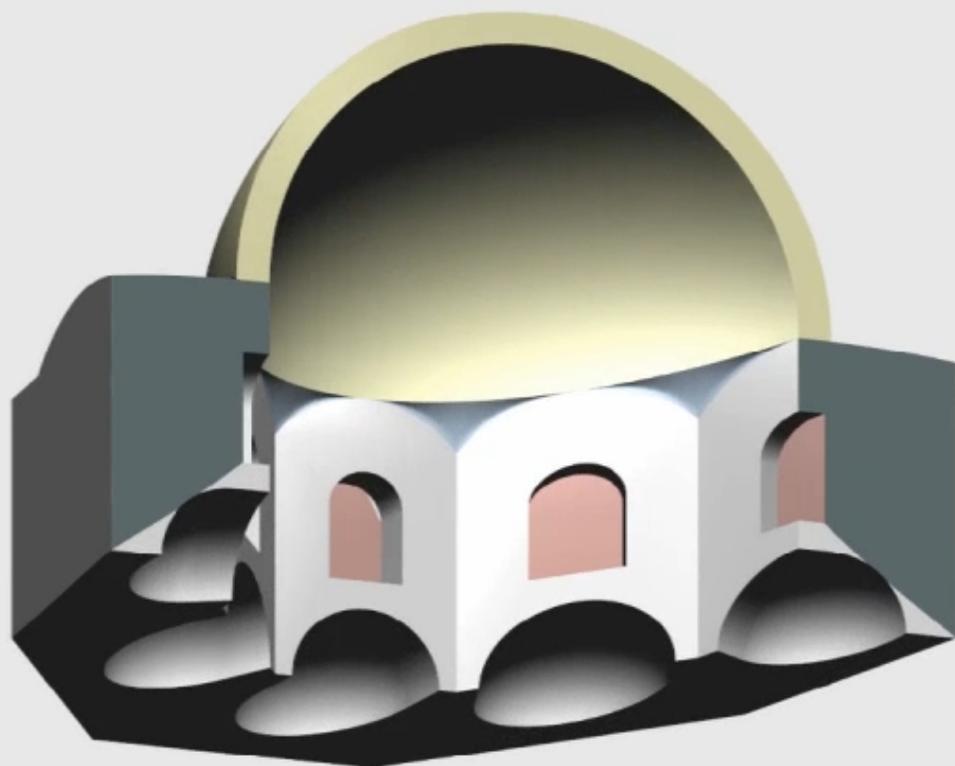
GRAVE PAR H. SAUVESTRE



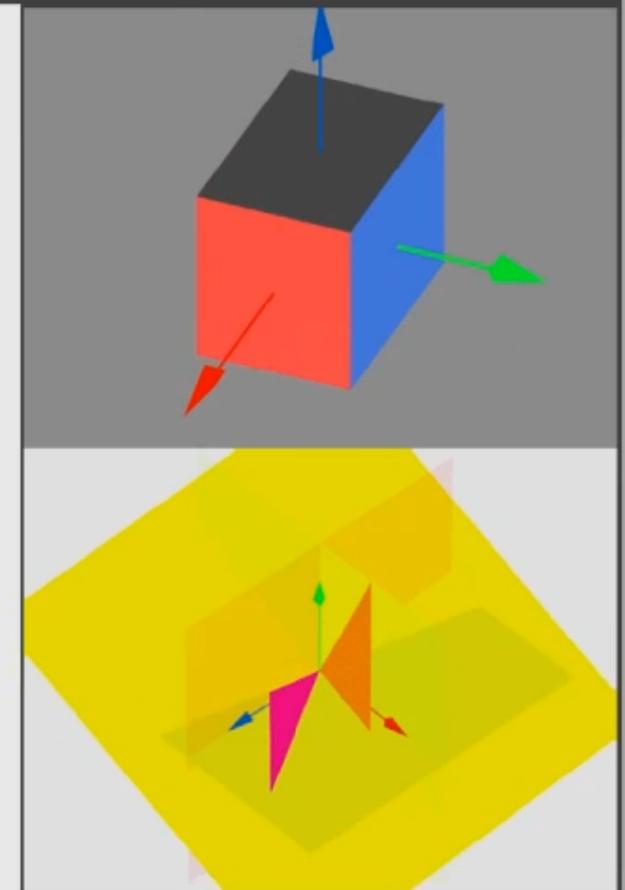
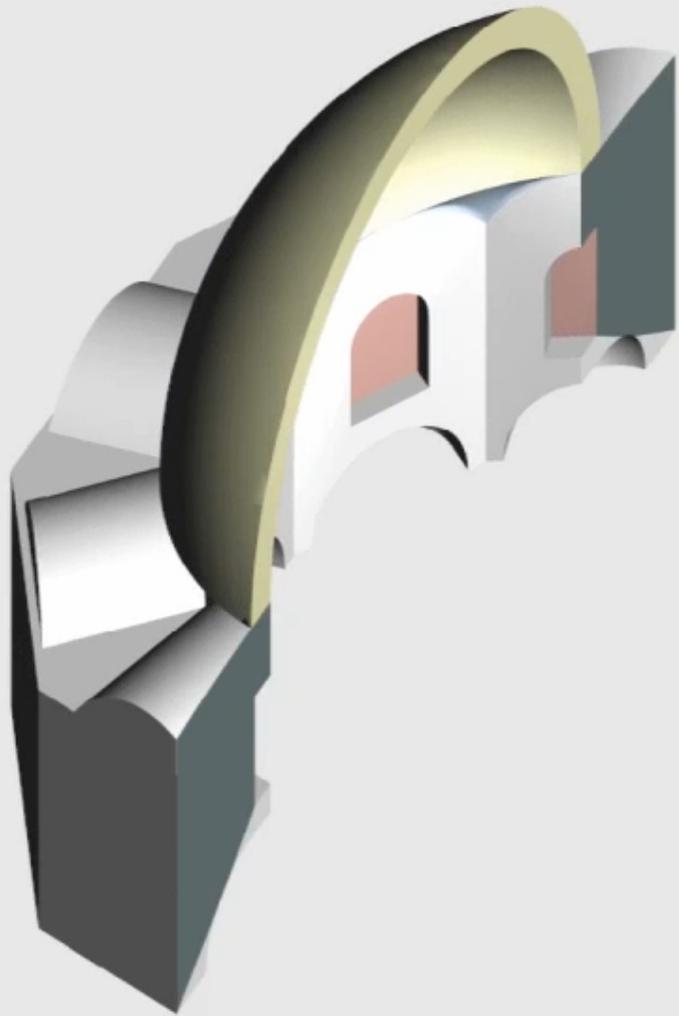
DESSINE PAR A. CHOISY

GRAVE PAR A. BORDET

PALATIN



Angolo tra gli assi ZY proiettati	62.00
Angolo tra gli assi ZX proiettati	84.00
Angolo tra gli assi XY proiettati	214.00
Azimut: dir. perp. al piano di proiezione	86.91
Zenit: dir. perp. e al piano di proiezione	95.48
Azimut direzione di proiezione	48.40
Zenit direzione di proiezione	112.81
Lunghezza dei vettori unitari proiettati	0.96
Angolo tra retta proiezione e piano proiezione	-181.25

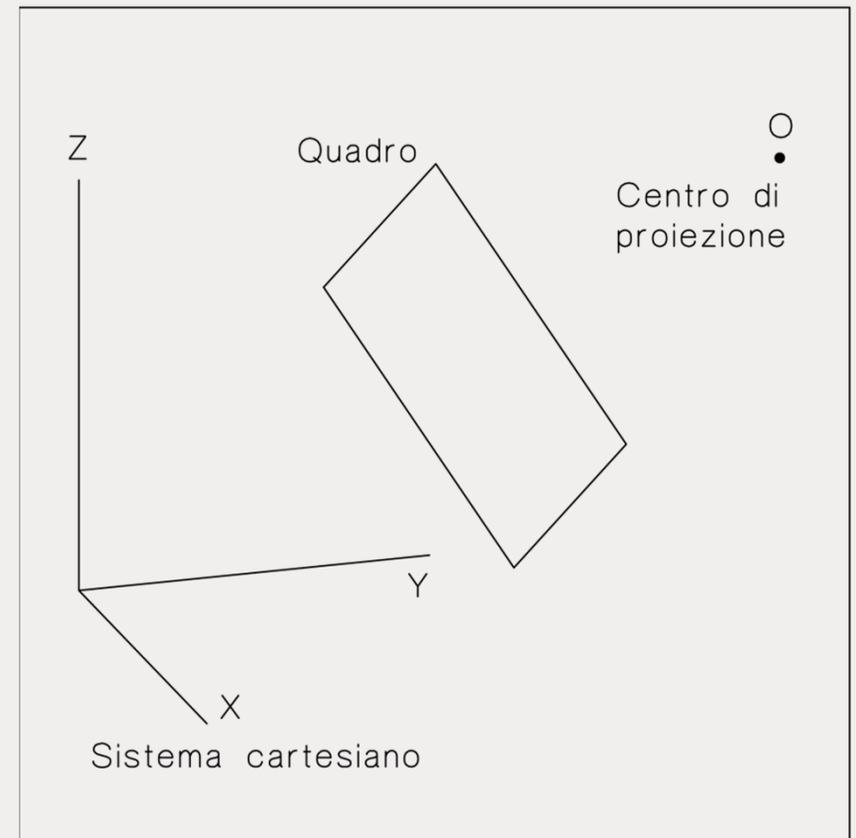


Angolo tra gli assi ZY proiettati	103.00
Angolo tra gli assi ZX proiettati	144.00
Angolo tra gli assi XY proiettati	113.00
Azimut: dir. perp. al piano di proiezione	76.97
Zenit: dir. perp. e al piano di proiezione	25.45
Azimut direzione di proiezione	31.10
Zenit direzione di proiezione	51.03
Lunghezza dei vettori unitari proiettati	0.92
Angolo tra retta proiezione e piano proiezione	-124.02

Le **prospettive** sono proiezioni coniche, vale a dire che il centro di proiezione si trova a distanza finita dal Quadro. Ciò comporta che segmenti uguali e paralleli tra loro non necessariamente sono proiettati uguali tra loro, ma anzi di norma saranno proiettati con lunghezze una diversa dall'altra. Nelle prospettive, inoltre, linee che nella realtà sono parallele tra loro (ma non parallele al Quadro) sono proiettate in modo che sul Quadro concorrono tutte ad un unico punto.

Pertanto, dato che nello spazio esistono infiniti fasci di rette parallele, una prospettiva può contenere infiniti punti di concorso o di fuga. Come per le altre proiezioni, una prospettiva è completamente determinata quando si definisce la giacitura del Quadro e la posizione del Centro di Proiezione, esterno al quadro stesso.

La traslazione del Quadro, purché il Centro di Proiezione non giaccia sul Quadro, modifica solo la scala dell'immagine, ma non i rapporti tra le varie parti. Lo spostamento del Centro di Proiezione, al contrario, modifica l'immagine.

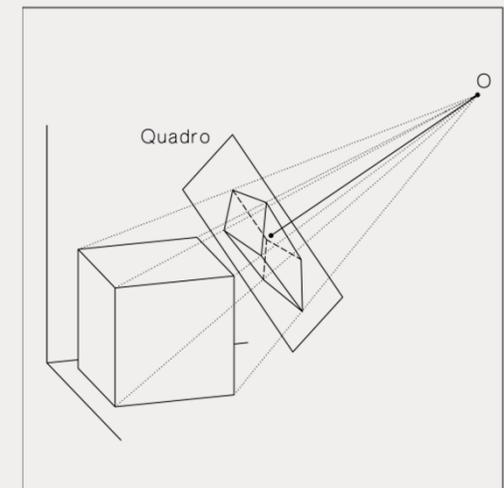
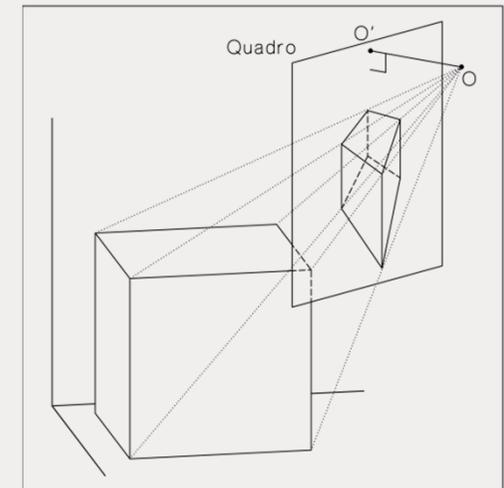
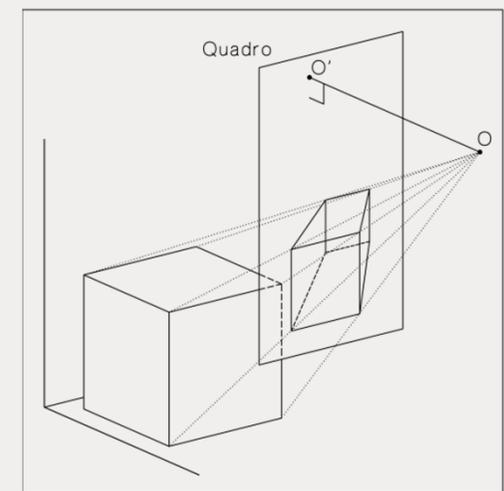


Per comodità le **prospettive** si dividono in tre tipi:

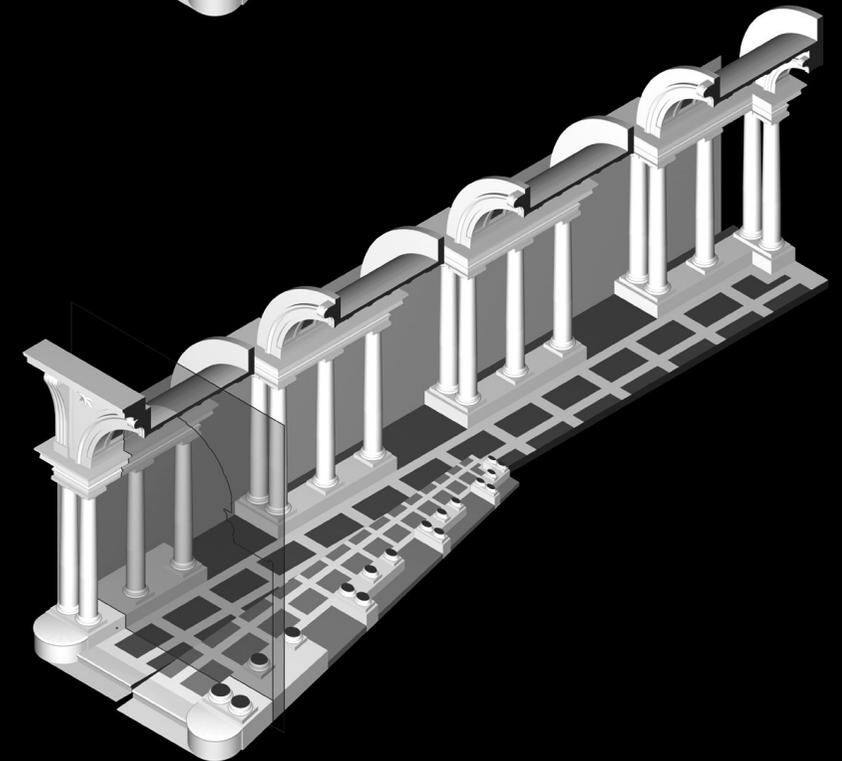
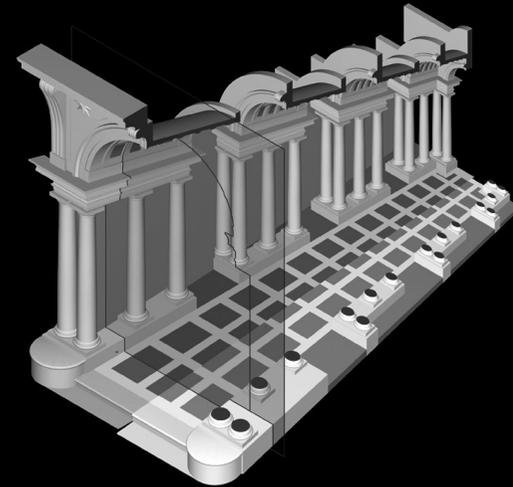
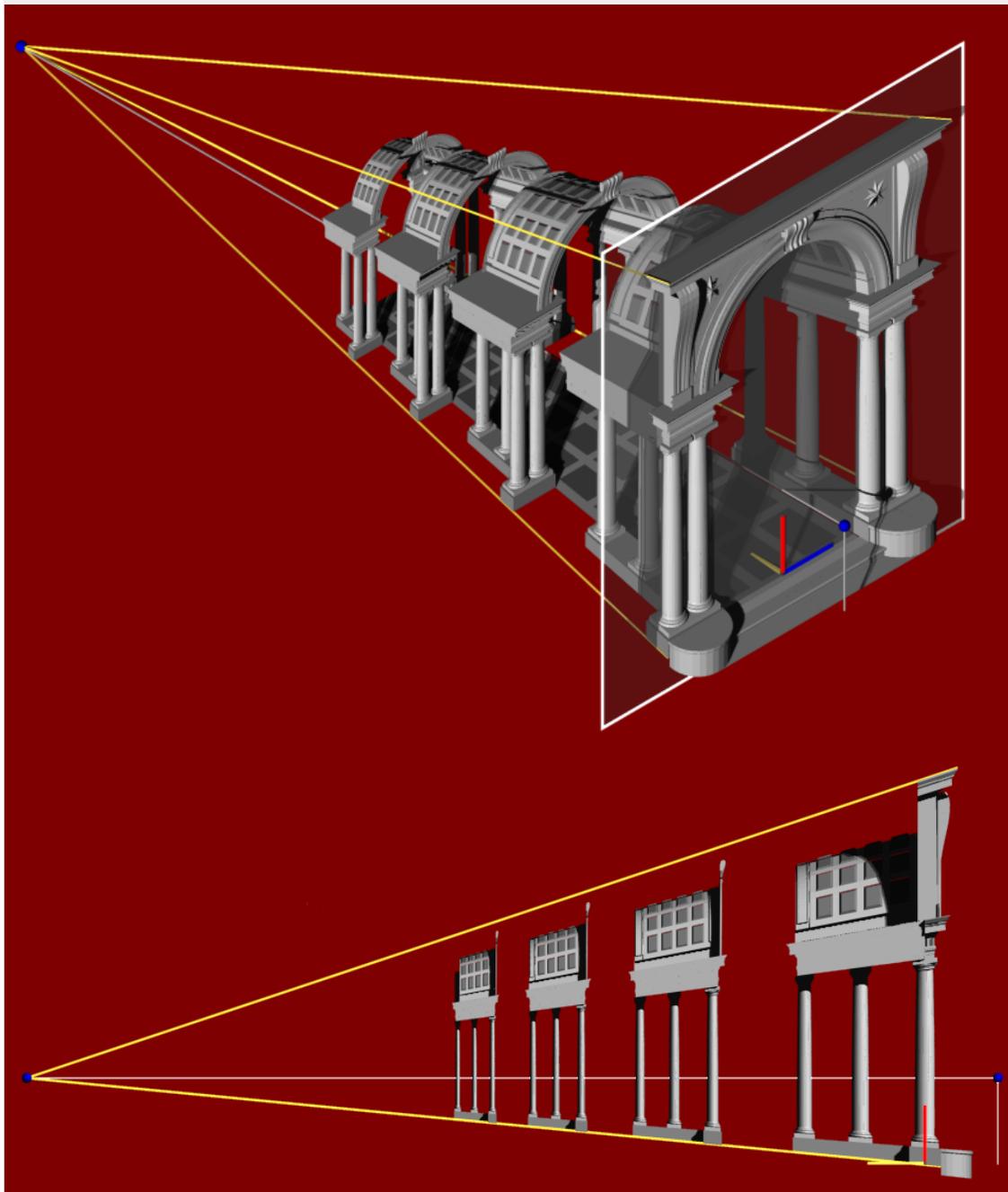
- A **quadro frontale**, quando il quadro è posto parallelamente ad uno dei piani cartesiani. In questo caso la retta direzione è sempre parallela a uno degli assi e i due altri assi vengono proiettati sul Quadro mantenendo l'angolo di 90 gradi. Inoltre, se il Quadro è verticale, l'Orizzonte contiene sempre il Punto Principale, dato che la retta direzione è orizzontale.

- A **quadro obliquo**, quando il Quadro è parallelo ad un asse e obliquo rispetto agli altri due. La retta direzione è pertanto sempre perpendicolare ad un asse e, se il Quadro è verticale, anche in questo caso l'orizzonte contiene sempre il Punto Principale. Se il Quadro è verticale i segmenti reali verticali manterranno la loro giacitura nella proiezione, mentre i segmenti orizzontali e paralleli ai due assi recedenti non saranno mai orizzontali (potrebbero esserlo solo se il Quadro fosse parallelo a un asse ma in quel caso si ricadrebbe nel tipo a Quadro frontale).

- A **quadro inclinato**, se il Quadro è posto in modo generico rispetto agli assi, non essendo né parallelo, né perpendicolare ad alcuno. Il Quadro non potrà dunque essere mai orizzontale o verticale e pertanto l'Orizzonte non conterrà mai il Punto Principale, visto che la Direzione Principale non potrà mai essere orizzontale.

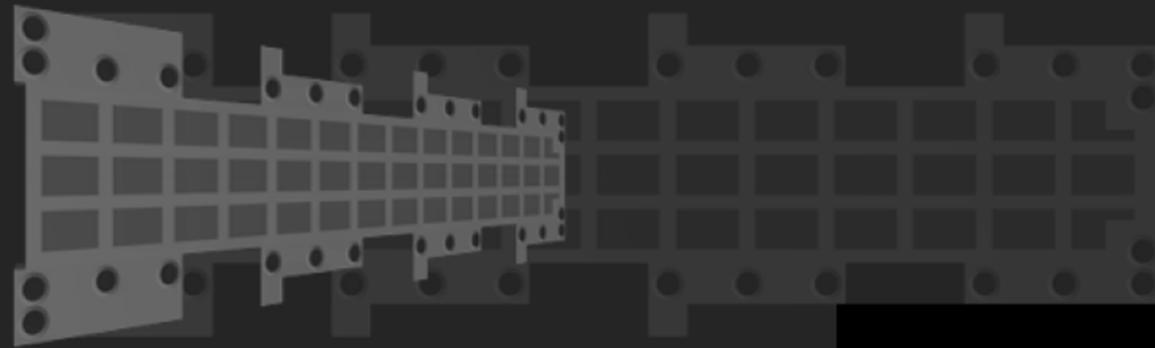


Galleria di Palazzo Spada - Borromini



I Principi

In alto a sinistra è presentato il modello regolare "standard" e il suo deformato, ottenuto usando un punto di vista posto esternamente alla galleria, un piano delle tracce posto sull'asse delle prime colonne e un punto di fuga collocato nella stessa posizione del punto di fuga della Galleria del Borromini.



Si suppone dato, in pianta e in prospetto, l'oggetto da riprodurre, nel nostro caso una scatola.

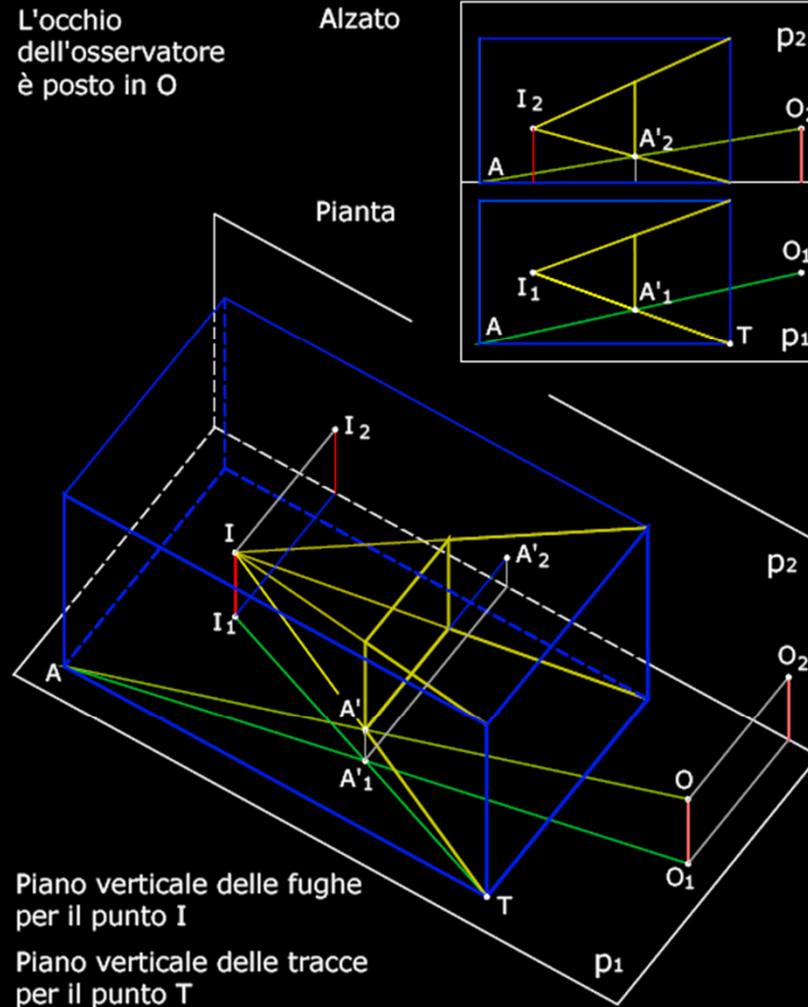
Si fissa la posizione dell'occhio in O_1 e O_2 ; si assegnano il piano delle tracce e il piano del pavimento, inclinato rispetto al piano orizzontale.

Il punto A avrà come immagine nello spazio illusorio il punto individuato da A'_1 , in pianta, e A'_2 , in alzato.

Tramite la pianta e l'alzato di ogni singolo punto, possiamo senz'altro ricostruire nello spazio la prospettiva solida dell'oggetto dato.

Se per O tracciamo la parallela al piano p_2 , I è il punto di fuga della prospettiva solida, per dove passa il piano delle fughe.

L'occhio, posto nel punto O , vedrà coincidere la scatola oggetto con la scatola deformata



Per un più approfondito studio dei concetti qui esposti, si veda: Rocco Sinigalli, **Una storia della scena prospettica, dal Rinascimento al Barocco. Borromini a quattro dimensioni**, Cadmo, Firenze 1998.

Canaletto – Panoramica del Bacino di San Marco

